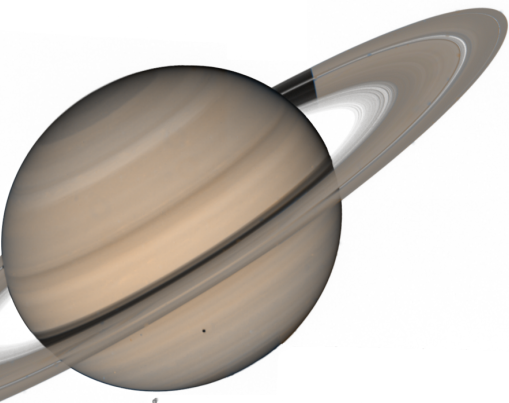
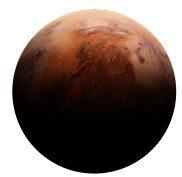
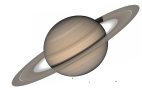


EL SISTEMA SOLAR EN UN PLA



Júlia Shu-Yan Torres
Tutora: Magda Llach
2n batxillerat A
Curs 2021 - 2023
Institut Josep Brugulat

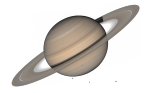




Síntesi. En aquest treball es busca demostrar sobretot visualment el moviment retrògrad dels planetes, concretament el de Saturn. Per fer-ho s'ha hagut d'estudiar la part històrica que selecciona tots els aspectes relacionats amb aquest àmbit de l'astronomia i també la part teòrica que són les seccions còniques; tan en forma com en fórmula, per després aplicar-ho en un cas real. Finalment, s'ha seguit dia rere dia durant un estiu la trajectòria de Saturn mitjançant una *app*, i tot i que els resultats no han estat els esperats per qüestió de la manca de temps, han estat prou satisfactoris pel context en què s'ha treballat.

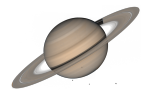
Síntesis. En este trabajo se busca demostrar visualmente el movimiento retrógrado aparente de los planetas, concretamente el de Saturno. Para hacerlo se han estudiado la parte histórica que selecciona todos los aspectos relacionados con este ámbito de la astronomía y la parte teórica que son las secciones cónicas; tanto en forma como en fórmula, para después aplicarlas en un caso real. Finalmente se ha seguido día tras día durante el verano la trayectoria de Saturno mediante una *app*, y aunque los resultados no han sido los esperados por cuestión de la falta de tiempo, han sido suficientemente satisfactorios teniendo en cuenta el contexto en el que se ha trabajado.

Abstract. This project seeks to demonstrate above all visually the apparent retrograde movement of the planets, specifically Saturn's. To do so, the historical part that selects all the aspects related to this field of astronomy and the theoretical part that are the conic sections have been studied; both in form and in formula, to later apply them in a real case. Finally, the trajectory of Saturn has been followed day after day during the summer through an *app*, and although the results have not been as expected due to lack of time, they have been sufficiently satisfactory considering the context in which the work has been carried out.



“Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist. Be curious. And however difficult life may seem, there is always something you can do and succeed at. It matters that you don't just give up.”

— **Stephen Hawking**



Per tota la gent que forma el meu Sistema Solar

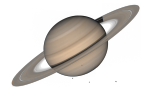


ÍNDIX

INTRODUCCIÓ	8
MOTIVACIÓ	8
OBJECTIUS	9
METODOLOGIA	9
MARC TEÒRIC	11
1. HISTÒRIA DE L'EVOLUCIÓ DE LA PERCEPCIÓ DEL SISTEMA SOLAR	12
1.1 TEORIA GEOCÈNTRICA	12
1.2 TEORIA HELIOCÈNTRICA	14
1.2.1 Hipàtia d'Alexandria	15
1.2.2 Johannes Kepler	17
1.2.2.1 Lleis de Kepler	18
1.2.3 Isaac Newton	19
2. COSSOS GEOMÈTRICS PLANS QUE DESCRUIEN EL SISTEMA SOLAR.	
SECCIONS CÒNIQUES	20
2.1 HIPÈRBOLA	21
2.2 PARÀBOLA	22
2.3 CIRCUMFERÈNCIA	23
2.4 EL·LIPSE	24
3. ÒRBITES	25
3.1 FORMA	25
3.1.1 Òrbites el·líptiques	26
3.2 DETERMINACIÓ	27
3.3 ÒRBITES DE COSSOS NATURALS	28
3.3.1 Retrogradació aparent dels planetes	30



MARC PRÀCTIC	32
1.FÓRMULA DE LA TRAJECTÒRIA DE SATURN	33
1.1 DADES	33
1.2 CÀLCULS	34
2.SEGUIMENT DE LA TRAJECTÒRIA DE SATURN	37
2.1 IMATGES REALS	38
2.2 SIMULACIÓ DEL MOVIMENT COMPLET	42
CONCLUSIÓ	45
TAULA DE FÓRMULES	48
WEBGRAFIA	49
ANNEXOS	51



INTRODUCCIÓ

MOTIVACIÓ

Des que era petita he sentit un gran interès per l'espai. Saber què hi ha més enllà i com funciona (si és que existeix) són les qüestions que passen més repetidament pel meu pensament. Puc dir que sempre he sentit una gran atracció per la física, però sobretot per l'astrofísica, l'astronomia i totes les ciències aplicables a l'univers. Aquest neguit que sempre he tingut de voler saber més, m'ha portat a investigar mitjançant llibres i documentals, i ha fet que estigui més captivada mentre l'àvia m'explicava les històries de la mitologia que hi ha rere els noms de les constel·lacions. Per tant, crec que la meva motivació principal ve d'un somni de la infantesa i del meu major interès. A causa d'això, de cara al futur m'agradaria estudiar-ho més profundament i dedicar-m'hi professionalment.

Considero que fer el treball de recerca d'aquest tema serà una gran oportunitat per mi, per aprendre i conèixer una mica més el món el qual m'agradaria formar part, i si veig que m'agrada, potser podré estar més segura del que vull.

Una altra motivació a fer el treball, és la posició que tinc jo al món de la ciència. Tot i que la societat ha avançat, les dones han patit una gran discriminació en aquest àmbit, i sobretot una gran invisibilització. Actualment, és molt freqüent que les dones formin part de l'àmbit de les ciències de la salut però no tant en les ciències teòriques o tecnològiques. És per això que m'agradaria donar un especial reconeixement a una brillant ment que m'ha apassionat sempre i que malauradament va patir aquesta discriminació amb un trist final: Hipàtia d'Alexandria.



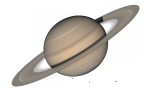
OBJECTIUS

- Conèixer la història més general i rellevant de l'evolució del coneixement científic en vers els moviments dels planetes del sistema solar.
- Conèixer i entendre les figures geomètriques que descriuen aquests moviments: còniques.
- Saber què són els moviments retrògrads aparents des d'un punt de vista matemàtic (geomètric o analític).
- Observar com dos planetes fan el moviment retrògrad aparent i enregistrar-lo.
- Demostrar mitjançant fotografies com dos planetes exerceixen el moviment retrògrad aparent.

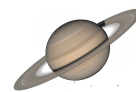
METODOLOGIA

Per iniciar el treball de recerca m'he interessat a conèixer tota la matemàtica que s'amaga darrere les òrbites dels planetes per tal d'entendre què és un moviment retrògrad aparent i per saber demostrar-lo. Però crec que en tota qüestió científica és necessari tenir uns coneixements històrics previs, per tant, el punt de partida del treball és l'estudi de la història de la concepció del sistema solar al llarg dels anys (a trets generals) a través d'internet i llibres.

La part que més complicacions m'ha suposat ha estat determinar quin o quins planetes havia d'observar amb la finalitat de demostrar aquest moviment. Resulta que l'any 2022 no és molt bo per veure retrogradacions, perquè cada planeta la fa en un temps diferent i just totes les pròximes es produeixen a principis del 2023. Per sort, gràcies a l'aplicació *Stellarium* i a l'ajuda d'un familiar he pogut confirmar que els planetes a analitzar poden ser Saturn i Júpiter, que inicien les retrogradacions aproximadament el 4 de juny i 28 de juliol, respectivament. El mètode primerament pensat per dur a terme la part pràctica va ser fotografiar els planetes diàriament a partir de la data d'inici del retrogradament, sempre des del mateix punt de referència per poder marcar uns eixos de coordenades. Però com tota investigació científica, hi ha trets imprevisibles que compliquen el procés. Per tant, per aconseguir



enregistrar aquests moviments he utilitzat dues aplicacions pel dispositiu mòbil per veure els cossos celestes de manera real (calibrada) i sense que importi l'hora del dia, ni les llums directes i indirectes, ni tampoc la distància a la qual es troba el planeta: característiques que han complicat el fet de poder fotografiar-ho. Un cop he enregirat tot, he creat un muntatge en què es veu amb uns eixos de coordenades la trajectòria de Saturn, i finalment un vídeo transitori de tot aquest procés que forma part dels annexos.



MARC TEÒRIC



1. HISTÒRIA DE L'EVOLUCIÓ DE LA PERCEPCIÓ DEL SISTEMA SOLAR

Per arribar a deduir que els cossos del sistema solar descriuen el·lipses s'han hagut d'idear i refutar models amb postulats i demostracions completament diferents, i molts pensadors i pensadores han hagut de dedicar tota la vida per fer aportacions científiques que han pogut ajudar durant tot aquest procés. Actualment, tenim molta informació del passat gràcies a escrits i altres fonts que s'han trobat, però també s'ha de tenir en compte la quantitat de material que s'ha perdut, cremat i prohibit al llarg dels anys, i en conseqüència la pèrdua de contingut treballat per altres científics i científiques. Així que aquest primer apartat del treball recollirà breument les dues teories que més acceptades han estat juntament amb unes figures destacables respecte a la comprensió del sistema solar (i de les lleis que el descriuen) i de les seves idees i aportacions. Des d'uns pensaments totalment obsolets i antics amb un senzill fonament matemàtic fins a l'actual teoria amb totes les seves complexitats geomètriques i analítiques.

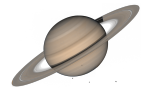
1.1 TEORIA GEOCÈNTRICA

La teoria geocèntrica o també coneguda com a “geocentrisme” és la que proposa un model en el qual la Terra roman al centre de l'univers immòbil mentre la resta de planetes, estrelles i el mateix Sol gira al seu voltant.



Fig. 1 Representació model geocèntric

Font: https://www.ecured.cu/Teor%C3%ADa_geoc%C3%A9ntrica



Aquest model era habitual en l'antiga Grècia, ja que va ser formulada per primera vegada per Aristòtil (385a C - 323 aC) però també ho va ser a la Xina tot i que no s'han trobat tantes evidències. El pensament va estar obsolet a partir de finals del segle XVI, a causa de l'aparició de l'heliocentrisme. Segons les fonts trobades al llarg de la història es diu que el geocentrisme va formar part de l'astronomia i filosofia de l'antiga Grècia molt abans que en altres regions.

Anaximandre de Milet (va viure de 611 aC a 547 aC aproximadament) va ser qui va proposar el tipus de cosmologia que va esdevenir el **geocentrisme d'Aristòtil**. Es tractava de situar la Terra com un cilindre al centre de tot. El Sol, la Lluna i els planetes eren forats que l'envoltaven. El segle V aC Plató i Aristòtil ja van escriure basant-se en el model geocèntric abans esmentat. També van suggerir que els fenòmens celestes es podien explicar amb un **moviment circular uniforme**. Cal remarcar que totes les seves teories van anar acompanyades d'evidències per tal de ser cregudes per la comunitat científica i filosòfica, i sobretot social. Ells pensaven que si la Terra es mogués, seria possible veure el canvi de posició de les estrelles a causa de la paral·laxi (l'efecte del canvi de posició d'un observador respecte de l'objecte observat) a no ser que les estrelles estiguessin tan allunyades que el canvi de posició fos impossible de detectar. Com que encara el fenomen de la paral·laxi era desconegut, van deduir simplement que la Terra no es movia.

Finalment, Claudi Ptolomeu (100 dC - 170 dC) va donar a conèixer de manera més elaborada el que Aristòtil i Plató van començar, i, per tant, els trets més característics ja van ser enunciats pels dos filòsofs anteriors a ell. Tot i això, Ptolomeu és el personatge més directament relacionat amb el model geocèntric, ja que també se sol anomenar model **Ptolemaic**.



1.2 TEORIA HELIOCÈNTRICA

La teoria heliocèntrica o també coneguda com a “heliocentrisme” proposa que el Sol és el centre del sistema solar i els planetes d’aquest sistema orbiten al seu voltant.

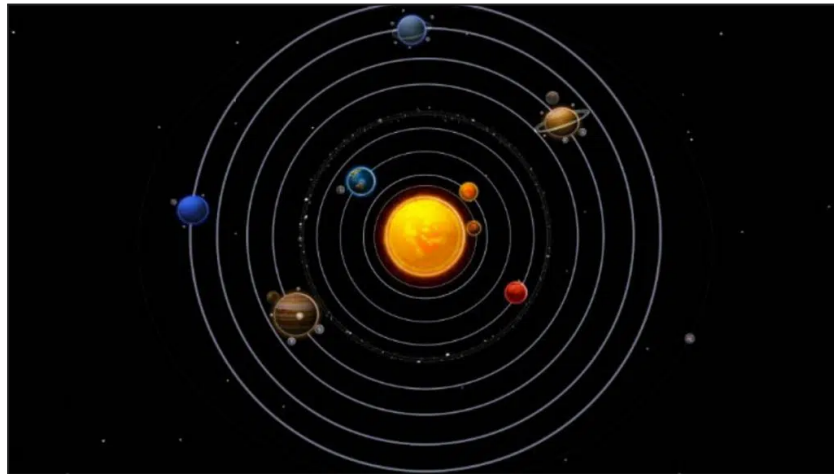


Fig. 2 Representació del model heliocèntric

Font: <https://www.meteorologiaenred.com/ca/heliocentrisme.html>

Va ser suggerit amb la finalitat de rebatre el model geocèntric. Tot i que Aristòtil i Plató presentessin unes evidències que eren cregudes per la majoria de la població, no eren prou consistents per alguns pensadors. Així que **Aristarc de Samos** va establir per primera vegada el model heliocèntric (el Sol és el centre de l'univers i els planetes giren al seu voltant en **cercles**). No va tenir èxit pel mateix motiu abans esmentat: la societat estava còmoda i es creia el geocentrisme, així que no era necessari haver de canviar de pensament.

Al cap d'un temps i de molts anys d'investigació **Nicolau Copèrnic** va poder demostrar i defensar aquesta teoria que finalment va estar més acceptada socialment. Aquesta ja introduïa conceptes que intentaven explicar i entendre esdeveniments com ara el **moviment retrògrad** o els **canvis de lluentor**, i ho va fer mitjançant les corbes epícicles ja conegudes per Ptolomeu. Moltes altres figures històriques van aportar en aquesta recerca, però no va ser fins Johannes Kepler que es va donar per conclusa. Kepler va demostrar matemàticament segons la seva primera llei que els planetes descriuen òrbites **el·líptiques** al voltant del Sol i no pas cercles, que era el que es pensava anteriorment.



1.2.1 Hipàtia d'Alexandria

L'exemple clar d'un personatge femení històric que s'ha dedicat plenament i ha perdut la vida per l'estudi i l'ensenyament astronòmic és Hipàtia d'Alexandria, la primera dona coneguda a plantejar i demostrar experimentalment la hipòtesi de l'heliocentrisme. Actualment, tot el reconeixement d'aquesta teoria és atribuït a Johannes Kepler, qui ho va demostrar matemàticament mil anys després que Hipàtia.

Hipàtia va néixer aproximadament el 370 dC a Alexandria, ciutat del coneixement del moment, on el punt àlgid n'era la biblioteca i els llocs d'aprenentatge com ara bé la universitat. Teó, el seu pare, va ser un matemàtic i un notable astrònom, professor de la universitat d'Alexandria a Egipte. La seva posició va permetre a Hipàtia aprendre i obtenir prou coneixement per poder raonar amb criteri i per difondre el seu saber. A part de ser dona, les dificultats del moment eren elevades per la filòsofa i matemàtica, ja que s'havia imposat el cristianisme pels romans com a idea principal i única, la qual no permetia antics pensaments com els que s'havien recuperat i es perseguia aquells qui els creien i difonien. Com s'ha dit, Hipàtia va seguir les passes del seu pare, i va fer grans avenços històrics en l'àmbit de matemàtiques i astronomia que resolien grans dubtes del moment, com quin era el moviment dels planetes i quina posició tenia la terra respecte a l'univers.

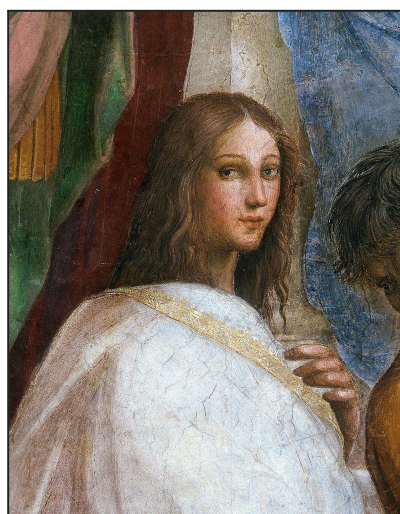


Fig. 3 Hipàtia d'Alexandria

Font: https://historia.nationalgeographic.com.es/a/hipatia-cientifica-alejandria_9797



Hipàtia d'Alexandria era mestra d'un grup d'alumnes i entre les seves ensenyances s'hi trobaven les matemàtiques i l'astronomia, però tot i exercir aquesta professió també es dedicava a la seva pròpia formació mitjançant els llibres i manuscrits conservats de la Biblioteca d'Alexandria. Com s'ha esmentat abans en l'explicació del geocentrisme i l'heliocentrisme, en aquells segles era un debat que creava controvèrsia, tot i que ja estava bastant acceptat que el Sol era el centre del sistema solar, faltava determinar la manera en com els planetes orbitaven. I com qualsevol altre científic Hipàtia va voler treballar-hi. Per començar a fer-ho va estudiar i finalment escriure un llibre sobre **còniques**. Es tractava d'una versió simplificada de les *Còniques d'Apol·loni*. Gràcies a aquest inici: les còniques, va poder fixar-se en el fet que era impossible que els planetes descrivissin circumferències, i que per força havia de ser d'una altra manera.

Després de la seva recerca i el seu estudi en geometria: les còniques, va concloure de manera experimental que els planetes orbiten el·lípticament, i se'n va adonar gràcies a la manera en què es dibuixen les el·lipses: que actualment es pot denominar mètode del jardiner.

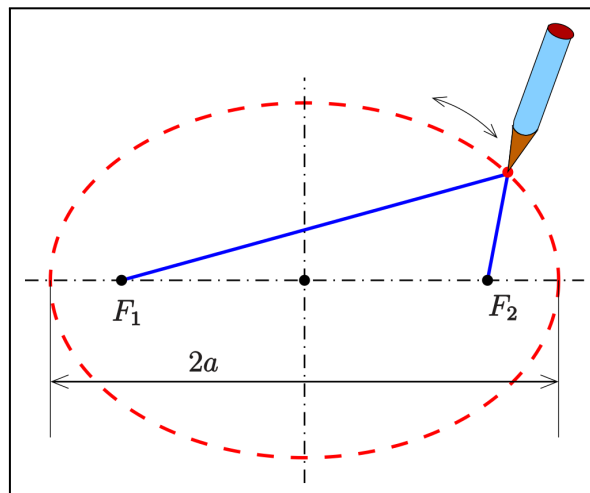


Fig. 4 Mètode del jardiner per dibuixar una el·lipse

Font: <https://www.lifeder.com/elipse/>



1.2.2 Johannes Kepler

Johannes Kepler va ser un notable astrònom i matemàtic nascut a Alemanya. És conegut per les tres lleis que va aportar sobre el moviment dels planetes i es poden trobar a les seves obres escrites: *Astronomia nova* i *Harmonices mundi*. Però també va treballar com a matemàtic per la cort de l'emperador Rodolf II, com a ajudant de l'astrònom Tycho Brahe; el qual li va aportar les dades necessàries per concloure'n les tres lleis, com a professor de matemàtiques i com a investigador en altres camps com ara l'òptica.

Les seves lleis van ser una revolució per l'època perquè aquestes expliquen tot el que no s'entenia fins llavors d'una manera clarament irrefutable: matemàticament.



Fig. 5 Johannes Kepler

Font: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kepler.htm>



1.2.2.1 Lleis de Kepler

Les lleis de Kepler descriuen el moviment planetari dins del sistema solar.

- **Primera llei:** Els planetes es mouen seguint òrbites en forma d'el·lipse amb el Sol en un dels seus focus.
- **Segona llei:** La línia traçada des d'un planeta fins al Sol escombra àrees iguals en temps iguals. Aquesta llei equival a la constància del moviment angular, és a dir, quan el planeta està més a prop del Sol la seva velocitat és major que quan està més lluny.

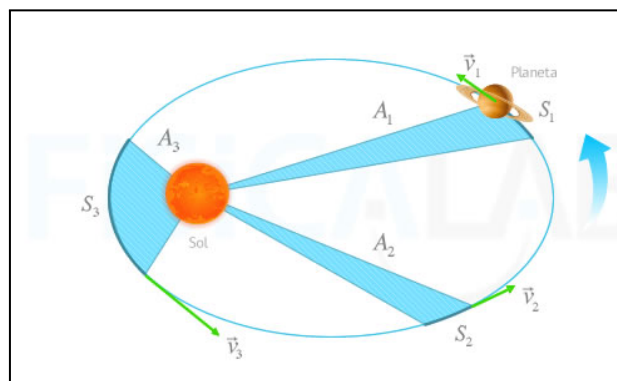


Fig. 6 Representació de la llei de les àrees

Font: <https://www.fisicalab.com/apartado/leyes-kepler>

- **Tercera llei:** Per tots els planetes que orbiten al voltant del Sol, la raó entre el període orbital (T) al quadrat i el radi orbital màxim (r) al cub es manté constant.

$$(1) \frac{T^2}{r^3} = K$$



1.2.3 Isaac Newton

Isaac Newton té una rellevància important en molts camps de la ciència (matemàtiques, astronomia, òptica...) però el que s'ha de destacar en aquest treball va ser la seva obra: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*¹ on explica la coneguda llei de la gravitació universal. Aquesta llei esmentada descriu la tercera de Kepler, que en el moment de formular-la, no s'acabava d'entendre per la societat ni per ell perquè era així, i fins que no va arribar Newton que va relacionar els conceptes entre si, no es va comprendre totalment.

L'aparició de Newton en aquest camp de recerca va suposar una gran troballa, ja que va lligar caps de tota la situació.



Fig. 7 Isaac Newton

Font: https://historia.nationalgeographic.com.es/a/isaac-newton-cientifico-y-alquimista_10246

¹ *Philosophiæ naturalis principia mathematica* és una obra en llatí escrita per Newton, a instància d'Edmond Halley, que recull els seus estudis i descobriments de la mecànica i les matemàtiques escrita de manera totalment geomètrica, pel fet que en aquella època encara no es comptava amb l'àlgebra



2. COSSOS GEOMÈTRICS PLANS QUE DESCRUIEN EL SISTEMA SOLAR. SECCIONS CÒNIQUES

Les seccions còniques són les **corbes** obtingudes mitjançant la intersecció d'un pla amb una superfície cònica de revolució.

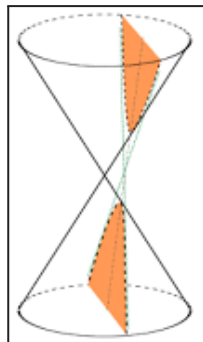


Fig. 8 Representació d'una superfície cònica de revolució

Font: <http://classmat3s.blogspot.com/2011/03/seccions-coniques-iv-lhiperbola.html>

Quan una recta m gira al voltant d'una altra recta s (aquesta anomenada com eix de la superfície cònica, per tant, és vertical) formant un angle α menor a 90° es genera una superfície cònica de revolució i totes les posicions per les quals la recta v passa s'anomenen generatrius de la superfície cònica. El punt d'intersecció v entre les dues rectes s'anomena vèrtex de la superfície cònica.

Si es considera un pla que talla una superfície cònica sense punt v , en funció de la posició (l'angle α) d'aquest pla respecte de la superfície cònica, la intersecció entre els dos esdevé un tipus de **corba** diferent, per tant, segons la definició de secció cònica: una secció cònica diferent. N'hi ha de quatre tipus: la circumferència, la paràbola, la hipèrbola i l'el·lipse.

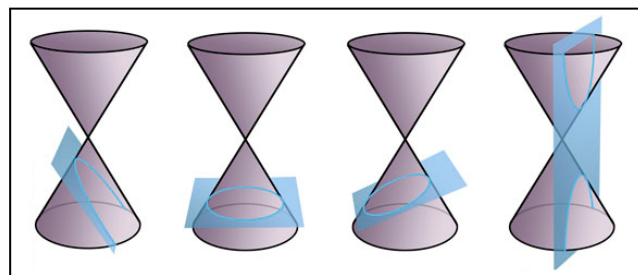


Fig. 9 Representació de les seccions còniques

Font: <https://www.geogebra.org/m/FUmazAfw>



Si el pla a considerar sí que conté punt v , la intersecció amb la superfície cònica pot ser un punt (v), una recta (una generatriu) o un parell de rectes (dues generatrius). En aquests casos les còniques són anomenades còniques degenerades.

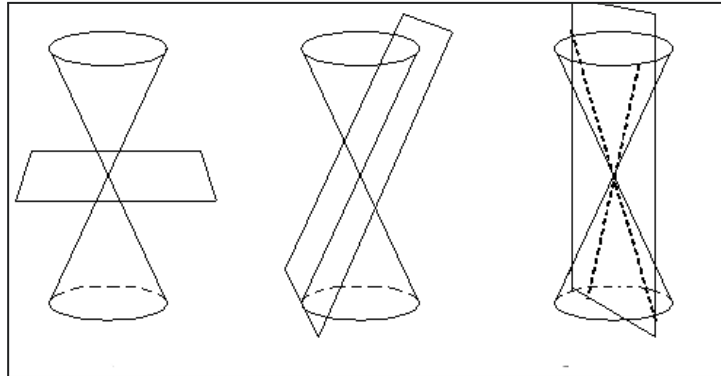


Fig. 10 Representació de les còniques degenerades

Font: https://www.frsn.utn.edu.ar/gie/conicas/secciones_cuerpo.html

2.1 HIPÈRBOLA

La **hipèrbola** és el lloc geomètric dels punts del pla, del qual la diferència de distàncies en valor absolut a dos punts fixos anomenats focus és constant. Això vol dir que:

El punt $P \in$ a una hipèrbola amb focus F i $F' \Leftrightarrow |PF' - PF| = constant$

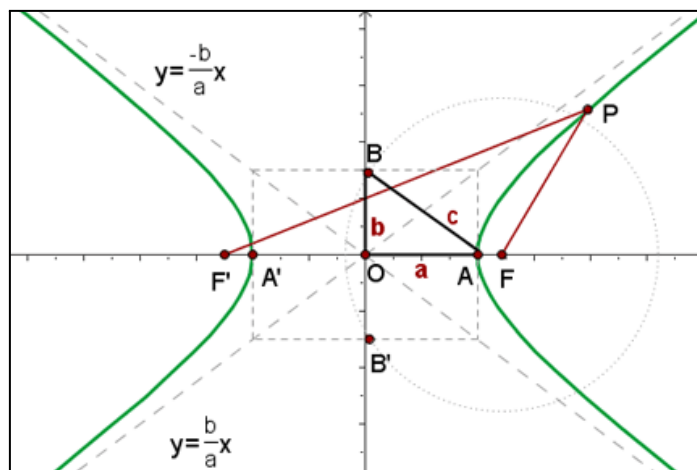


Fig. 11 Representació hipèrbola

Font: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/conica/hiperbola.html>



Si s'aplica el teorema de Pitàgores al triangle OAB s'obté la relació fonamental de la hipèrbola:

$$(2) c^2 = b^2 + a^2$$

I l'equació reduïda de la hipèrbola, la qual relaciona la seva definició i la seva relació fonamental:

$$(3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'excentricitat és un paràmetre relacionat a totes les seccions còniques. Es sol considerar com una mesura del grau en què la figura es desvia de ser una circumferència. L'excentricitat de la hipèrbola és més gran que 1.

2.2 PARÀBOLA

La **paràbola** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat focus i d'una recta anomenada directriu. Per tant:

El punt $P \in$ a la paràbola $\Leftrightarrow d(P, focus) = d(P, directriu)$

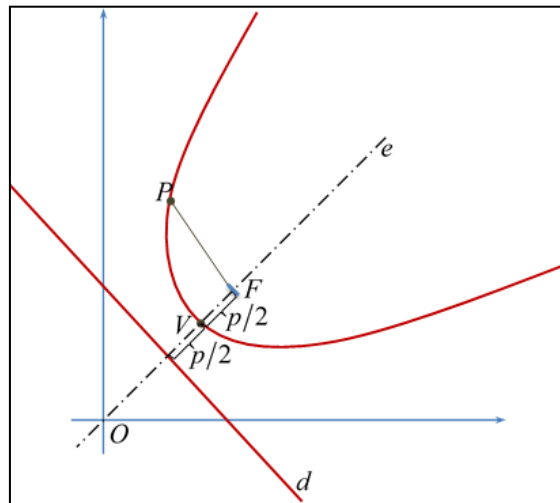


Fig. 12 Representació paràbola

Font: <https://lasmatematicas.eu/la-parabola/>

Doncs, l'equació reduïda de la paràbola és:

$$(4) y^2 = 2px$$

L'excentricitat de la paràbola és 1.



2.3 CIRCUMFERÈNCIA

La **circumferència** és la figura geomètrica plana que descriu uns punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat centre i la distància des de qualsevol punt de la circumferència al centre es diu radi. A partir de la definició es dedueix la seva equació general:

$$(5) \ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Per tal que aquesta equació general descriuï una circumferència, el radi al quadrat (r^2) ha de ser un nombre positiu.

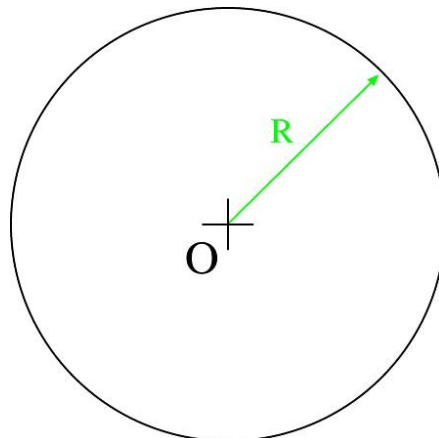


Fig. 13 Representació de la circumferència

Font: http://frcesc.com/FSP/html/dt/geo_plana/circumferencia.html

L'excentricitat de la circumferència és 0.



2.4 EL·LIPSE

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla. La seva suma de distàncies a dos punts fixos (anomenats focus) és constant. És a dir que:

El punt $P(x, y) \in$ a l'el·lipse $\Leftrightarrow F + PF' = \text{constant}$

La suma de les distàncies des de qualsevol punt P de l'el·lipse als dos focus és constant i igual a la longitud d' a .

$$(6) \text{dist}(PF) + \text{dist}(PF') = 2a$$

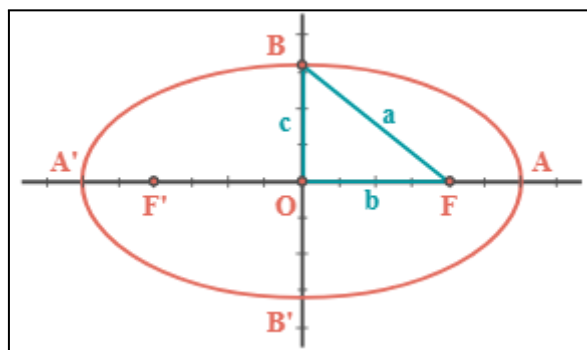


Fig. 14 Representació de l'el·lipse

Font: <https://www.sangakoo.com/ca/temes/equacio-de-l-ellipse-amb-focus-sobre-l-eix-ox>

Si s'aplica el teorema de Pitàgores al triangle OBF (tal com es fa a la hipèrbola) s'obté la relació fonamental de l'el·lipse:

$$(7) a^2 = b^2 + c^2$$

I l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$(8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'excentricitat de l'el·lipse és superior a 0 i inferior a 1, i és la raó entre c i a .



3. ÒRBITES

Una òrbita és la trajectòria que recorre un cos a l'espai al voltant d'un altre a causa de la força centrípeta o acceleració normal. En aquest cas referent a l'espai, aquestes trajectòries recorregudes són causades per la gravetat.

3.1 FORMA

Els cossos que orbiten sobre uns altres cossos són menys massius que els altres: la Lluna és molt menys massiva que la Terra, i la Terra molt menys massiva que el Sol. Per tant, es considera que el cos que orbita es troba sotmès a la força de la gravetat definida per Isaac Newton. Aquesta òrbita bé podria prendre forma d'el·lipse, de paràbola o hipèrbola i se situaria el cos massiu en un dels focus de la cònica. Tenir una forma o una altra depèn de l'**energia orbital específica** del cos en òrbita. S'expressa matemàticament com:

$$(9) K = \frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

On:

- K és l'energia orbital
- V és la velocitat del cos en òrbita (en mòdul)
- G és la constant de la gravitació universal
- M la massa del cos
- r és la distància entre els dos cossos

Si l'energia orbital és negativa ($K < 0$) l'òrbita serà una el·lipse, si és $K = 0$ l'òrbita serà parabòlica i si és positiva ($K > 0$) serà hiperbòlica.

Normalment, la majoria de cossos naturals del sistema solar descriuen **òrbites el·líptiques**, excepte alguns cometes que la poden descriure hiperbòlica.



3.1.1 Òrbites el·líptiques

El temps que un cos en òrbita tarda a recórrer aquesta completa s'anomena **període de revolució** o **període de l'òrbita**. Es defineix matemàticament com:

$$(10) T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

- a és el semieix major de l'òrbita
- μ és un paràmetre gravitacional

La definició matemàtica de la velocitat és:

$$(11) v = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$$

- a és el semieix major de l'òrbita
- μ és un paràmetre gravitacional
- r és la distància radial des del cos que orbita al cos central

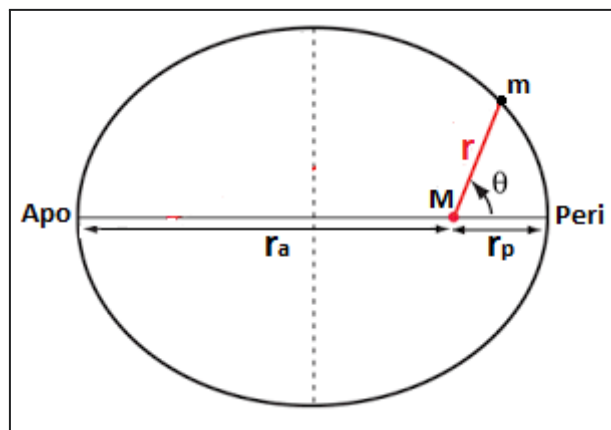


Fig. 15 Dibuix d'una òrbita el·líptica amb les seves parts importants. Cal destacar el radi de la apoàpside (r_a) que és la distància entre el centre del cos del qual s'està orbitant i el punt més allunyat de l'òrbita, i també el radi del periàpside (r_p) que és la distància entre el centre del cos del qual s'està orbitant i el punt més proper de l'òrbita.

Font:

<https://forum.lawebdefisica.com/blogs/alriga/316768-c-%C3%A1lculo-de-la-velocidad-en-%C3%B3rbitas-el-%C3%ADptic>
as



3.2 DETERMINACIÓ

Determinar una òrbita d'un cos és molt important científicament, ja que sabent-la es pot conèixer la posició d'aquest cos en qualsevol moment. Així doncs, la posició d'un cos que orbita el·lípticament depèn de sis paràmetres anomenats **elements orbitals**. Aquests defineixen la forma, posició i orientació a l'espai de l'el·lipse.

- Semieix major (a): Defineix la mida de l'el·lipse
- Excentricitat (e): Defineix la forma de l'el·lipse
- Inclínació (i): Angle entre el pla de l'el·lipse i un sistema de referència.
- Longitud del node ascendent (Ω): Angle entre el node ascendent de l'òrbita (un dels dos punts on una òrbita inclinada creua un pla de referència) i el meridià.
- Augment del periàpside (ω): Angle entre el node ascendent i el periàpside (punt de màxima aproximació d'un cos a l'òrbita)
- Anomalia mitjana (M): Posició dins l'òrbita del cos respecte al periàpside

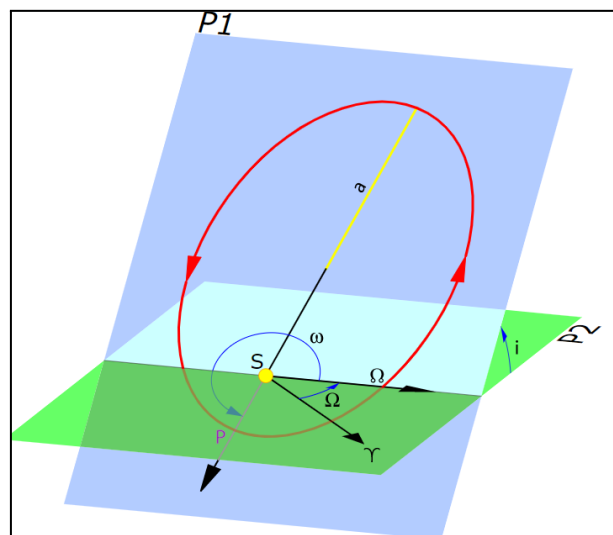


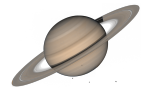
Fig. 16 Representació dels elements orbitals

Font: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bahnlemente.svg>



3.3 ÒRBITES DE COSSOS NATURALS

- **Òrbites de planetes:** com s'ha esmentat anteriorment, els planetes segueixen òrbites de tipus el·líptiques de baixa excentricitat i inclinació, per tant, a ull nu poden semblar circulars.
- **Òrbites de satèl·lits:** els satèl·lits naturals orbiten al voltant dels planetes en òrbites el·líptiques, de baixa excentricitat, com a resultat, aproximadament circulars i solen ser properes a l'equador del planeta en qüestió. Tot i això, hi ha excepcions.
- **Òrbites de cometes:** els cometes poden orbitar de tres maneres diferents; el·lípticament, hiperbòlicament i quasi parabòlicament. Això els distingeix de la resta de cossos naturals, ja que són els únics que poden fer-ho. Per tant, existeix molta varietat en els elements orbitals, però sovint es troben cometes amb una òrbita el·líptica molt excèntrica i de llarg període.
- **Òrbites d'asteroides:** els asteroides segueixen òrbites el·líptiques, però a diferència de les dels planetes, són diverses entre si respecte als elements orbitals: la inclinació, excentricitat i semieix major. Una gran part dels asteroides orbiten a l'interior de l'anomenat cinturó d'asteroides que es troba entre Mart i Júpiter. Una altra part dels asteroides, anomenats asteroides troians, es troben a la mateixa òrbita de Júpiter en els **punts de Lagrange**, que s'explicaran a continuació.



Els punts de Lagrange o punts L són les cinc posicions d'una òrbita o sistema orbital en les que un objecte, només afectat per la gravetat, pot estar teòricament estacionat respecte a dos objectes més grans que aquest, tal com seria el cas d'un satèl·lit artificial respecte la Terra i la Lluna.

També es diu que els punts de Lagrange són les solucions al famós problema de la física dels tres cossos, quan aquests estan restringits a òrbites circulars.

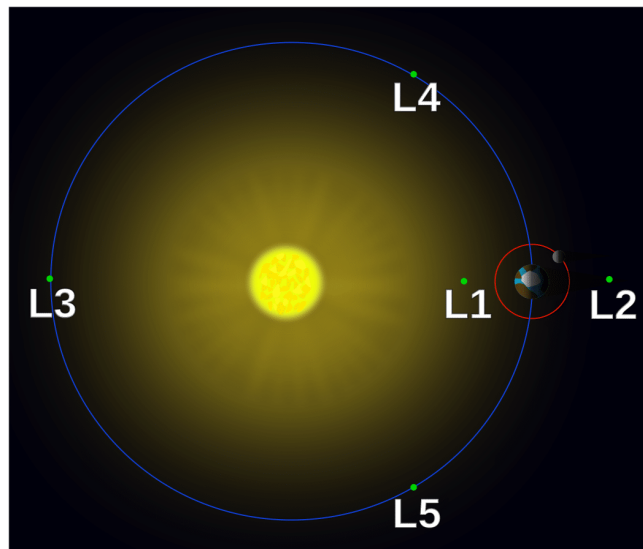


Fig. 17 Representació dels punts de Lagrange

Font: <https://www.astroboticora.com/los-puntos-de-lagrange/>



3.3.1 Retrogradació aparent dels planetes

Un planeta sol tenir com a moviment real anar d'oest a est, igual que el Sol, però en l'anomenat període de retrogradació es veu el contrari, d'est a oest.

El moviment retrògrad és una **il·lusió òptica** deguda a la diferència de les velocitats orbitals dels planetes, i és per aquest motiu que se'l denomina "aparent". Quan va ser primerament observat pels antics astrònoms grecs va ser tota una sorpresa, i també el motiu pel qual van anomenar "planetes" als cossos que orbiten al voltant del Sol, ja que en grec vol dir "pelegrins". Actualment, se sap perquè succeeix, així que a continuació s'explicarà com sorgeix aquesta il·lusió:

Conceptes previs

Oposició: Configuració de dos astres que es troben en relació amb la Terra en dos punts del cel oposats (que difereixen de 180°)

Elongació: Angle entre el Sol i un planeta observat des de la Terra

- Quan un planeta extern s'acosta a la seva oposició, com que la Terra està en una òrbita interior viatjarà més ràpidament, tal com regeix la segona de les tres lleis de Kepler, i en el moment en què la Terra avança el planeta exterior en qüestió, succeirà el període de retrogradació, i quan l'elongació disminueixi i la Terra l'hagi avançat, tornarà a la seva direcció inicial.

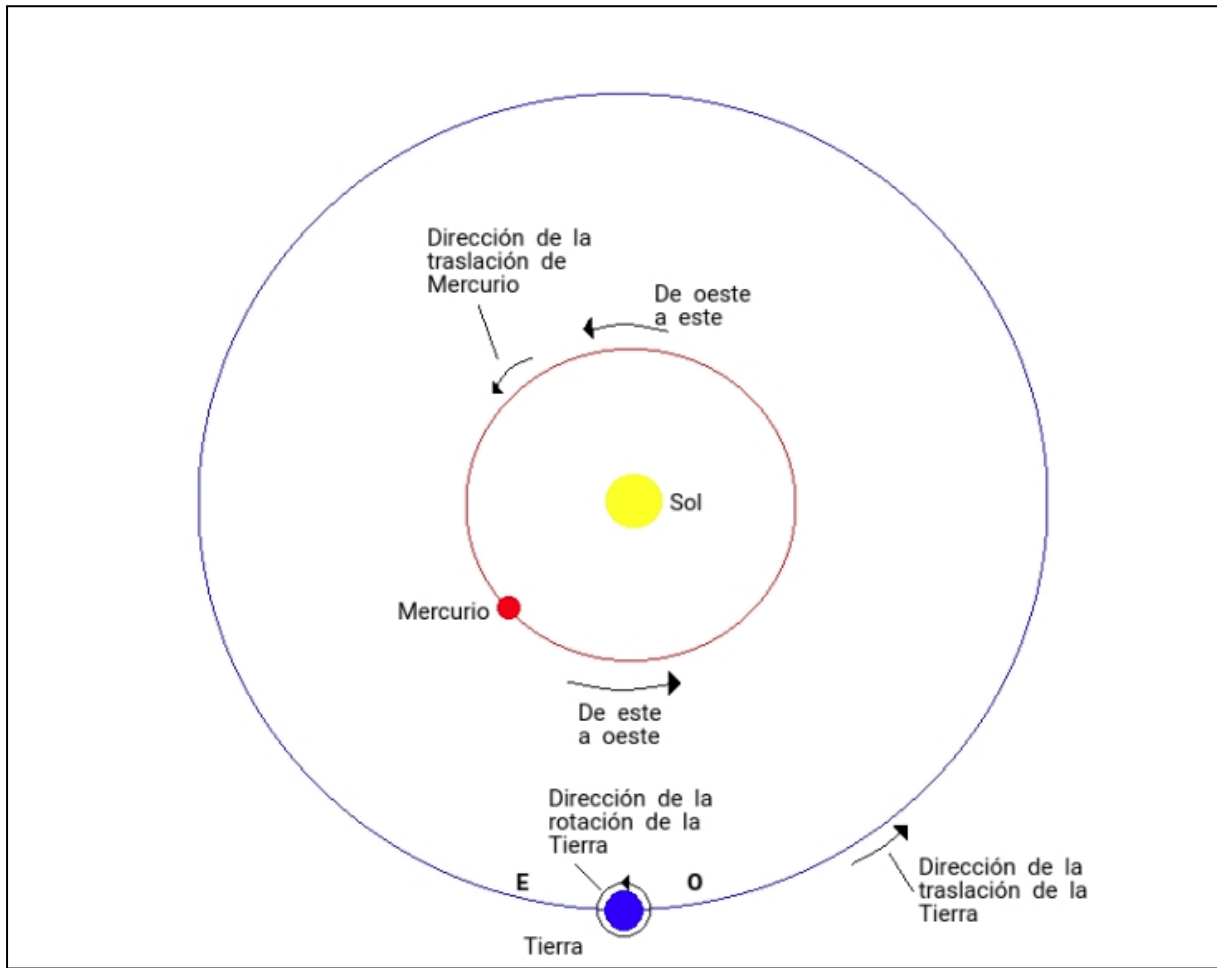
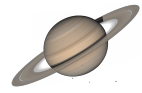


Fig. 18 Representació del sentit del moviment de Mercuri quan s'acosta al punt més proper i més llunyà de la Terra

Font: <https://politicaconciencia.astromsxsfpt.org/el-movimiento-retrogrado-de-los-planetes-del-sistema-solar/>



MARC PRÀCTIC



1. FÓRMULA DE LA TRAJECTÒRIA DE SATURN

1.1 DADES

Per iniciar la part pràctica del treball s'han hagut de cercar les dades sobre l'òrbita del planeta a estudiar: Saturn. Es començarà tenint en compte el semieix major i l'excentricitat.

Planetes	Semieix major (milions de km)	Període de rotació al voltant del Sol (dies)	Excentricitat
Mercuri	57,9	87,96	0,2056
Venus	108,2	224,68	0,0068
Terra	149,6	365,26	0,0167
Mart	227,9	686,95	0,0934
Júpiter	778,3	4337	0,0483
Saturn	1427,0	10760	0,0560
Urà	2871,0	30700	0,0461
Neptú	4497,1	60200	0,0097
Plutó	5913,5	90780	0,2484

Fig. 19 Taula amb les dades per trobar l'equació de la trajectòria del moviment

Font: <https://www.blinklearning.com/coursePlayer/clases2.php?idclase=90924370&idcurso=1585420>

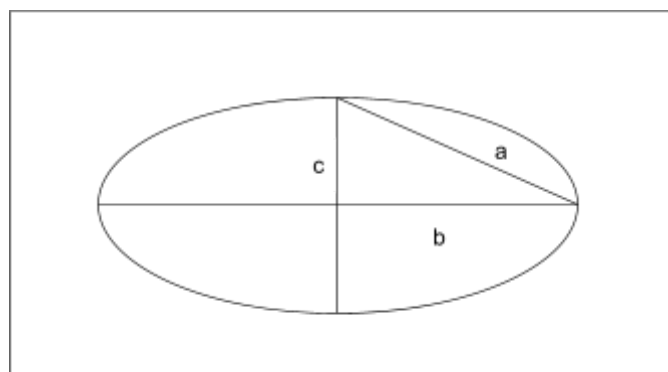


Fig. 20 Dibuix utilitzat per realitzar els càlculs de la trajectòria d'un planeta

a= semieix major, b=relació entre l'excentricitat i el semieix major, c=paràmetre determinat per la relació pitagòrica

Font: creació pròpia



1.2 CÀLCULS

Per determinar la fórmula de la trajectòria de Saturn es necessiten les dades adjuntes a la taula anterior i altres dades que es determinaran a través del teorema de Pitàgores i/o a partir de les definicions i fórmules treballades al llarg de la part teòrica del treball.

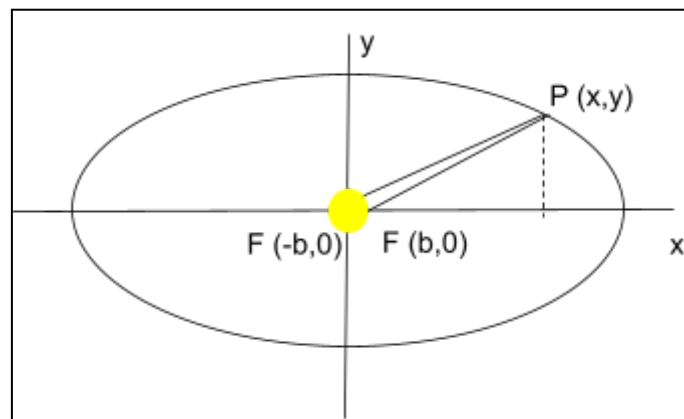


Fig. 21 Representació d'un punt P i els focus de l'el·lipse

Font: creació pròpia

Per tant, es comença utilitzant la fórmula 6 a l'apartat de l'el·lipse:

$$(6) \text{dist}(PF) + \text{dist}(PF') = 2a$$

$$\sqrt{(x-b)^2 + y^2} + \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x-b)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+b)^2 + y^2})^2$$

$$(x-b)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+b)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+b)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xb + b^2 - 4a^2 - x^2 - 2xb - b^2 = -4a\sqrt{(x+b)^2 + y^2}$$

$$(a^2 + xb)^2 = (a\sqrt{(x+b)^2 + y^2})^2$$

$$a^4 + 2xba^2 + x^2b^2 = a^2(x^2 + 2xb^2 + b^2 + y^2)$$

$$a^2(a^2 - b^2) = x^2(a^2 - b^2) + y^2a^2$$



Sabem que $a^2 = b^2 + c^2$

$$a^2(c^2) = x^2(c^2) + y^2a^2$$

$$\frac{a^2c^2}{a^2c^2} = \frac{x^2c^2}{a^2c^2} + \frac{y^2a^2}{a^2c^2}$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

Mitjançant un factor de conversió es passa de milions de km a UA i substituïm les dades a l'equació resultant.

$$1 \text{ UA} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$a = 1427'0 \text{ milions km} \approx 9'51 \text{ UA}$$

$$e = \frac{b}{a} \rightarrow b = 79'912 \text{ milions km} \approx 0'53 \text{ UA}$$

$$1 = \frac{x^2}{(90'44)^2} + \frac{y^2}{(0'28)^2} \text{ (UA)}$$

Seguidament, s'utilitzarà la fórmula de la **velocitat angular** per trobar el desplaçament mitjà de Saturn en graus:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{10760 \text{ dies}} = 0'0334^\circ/\text{dia}$$

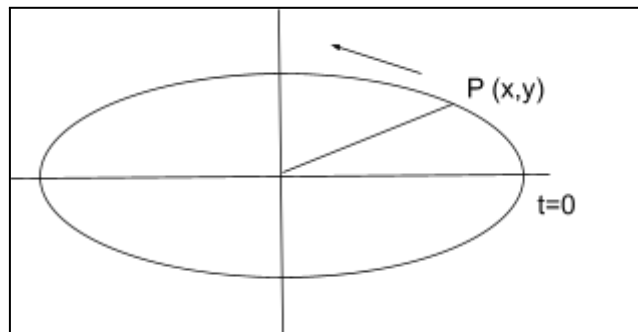


Fig. 22 Representació del moviment angular, considerant les abscisses el temps

Font: creació pròpia



Finalment, es parametritzaran les equacions en funció del temps per tenir com a resultat dues equacions (x i y) que indicaran la posició del planeta en funció del temps (t).

$$x = a \cdot \cos(0'0334t) \quad a \approx 9'51 \text{ UA}$$

$$y = b \cdot \sin(0'0334t) \quad b \approx 0'53 \text{ UA}$$

El període de **rotació al voltant del Sol** de Saturn és de 10760 dies (29 anys i 167 dies aproximadament). Per tant, el moviment estudiat durant només 87 dies és molt poc apreciable, així que abans de veure els resultats reals, es posarà un cas d'una situació exemple en la que Saturn ha recorregut la quarta part de la seva trajectòria (2690 dies).

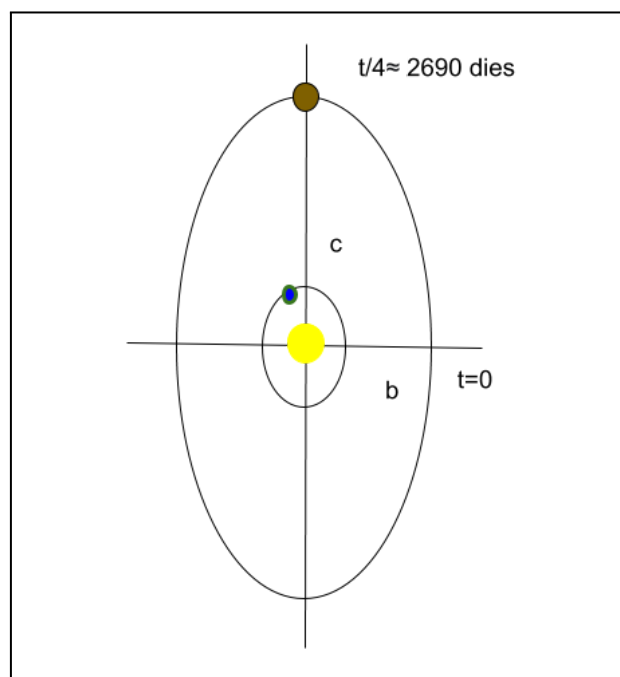


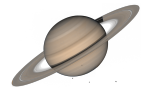
Fig. 23 Esbós de la situació exemple

Font: creació pròpia

Si considerem el temps 2690 dies, $t = 2690$. $a \approx 9'51 \text{ UA}$. $b \approx 0'53 \text{ UA}$

$$x = a \cdot \cos(0'0334 \cdot 2690) \rightarrow x = 0'02556 \text{ UA}$$

$$y = b \cdot \sin(0'0334 \cdot 2690) \rightarrow y = 9'4999 \text{ UA}$$



2. SEGUIMENT DE LA TRAJECTÒRIA DE SATURN

Per poder fer el seguiment de la trajectòria de Saturn, tal com explica la metodologia del treball, s'ha fet servir l'app *Night Sky X* per capturar la imatge que es projecta, això s'ha pogut fer amb les dades aportades per l'app *Stellarium*² (és a dir, la data d'inici i fi del moviment).

Cada dia des de l'inici aproximat de la retrogradació de Saturn (4 de juny) s'ha capturat des del mateix punt el planeta, deixant espai de marge per poder apreciar el moviment. Cada dia la fotografia va ser enregistrada a les 23:06, perquè l'hora de sortida del planeta era entre les 02:00 i les 03:00, i per motius comprensibles, no hi havia la possibilitat de poder seguir-lo cada dia a aquesta hora.

Com està clar, la diferència de posició en un dia de diferència és gairebé **negligible**, però un cop van passant les setmanes es pot apreciar visualment. S'ha qualificat el moviment de negligible perquè gràcies als càlculs abans vistos es pot observar que el moviment del planeta en un dia és només d'uns $0'0334^\circ$ /dia, per tant, gairebé res.

Abans de veure les imatges, cal tenir en compte que el procés de retrogradació no ha finalitzat, ja que acaba al novembre aproximadament. Així que per qüestió de temps no s'ha pogut seguir enregistrant el moviment del planeta, i, en conseqüència, no s'ha demostrat tot el moviment complet.

I finalment, es mostraran només tres imatges del procés, perquè es vegi una clara diferència de posicions entre el primer dia, el 42è dia (més o menys la meitat del procés) i el 87è, l'últim dia enregistrat.

² *Stellarium* és una aplicació per PC considerada un laboratori d'astronomia



2.1 IMATGES REALS



Imatge 1. Primera captura de pantalla

Aquesta imatge va ser enregistrada el 4 de juny a les 23:06 des de l'escriptori de la meua habitació, concretament en un espai marcat amb dos punts per tal que cada dia fos des del mateix lloc.

Tal com s'aprecia, Saturn es troba molt baix, a sota l'horitzó, ja que com abans s'ha esmentat, el planeta sortia entre 02:00 i 03:00 de la matinada, i no va ser viable seguir diàriament aquest horari.

També es poden apreciar altres elements a part del considerat protagonista, Plutó per sobre l'horitzó i en direcció l'est, i la varietat de satèl·lits STARLINK disposats a prop de Saturn.

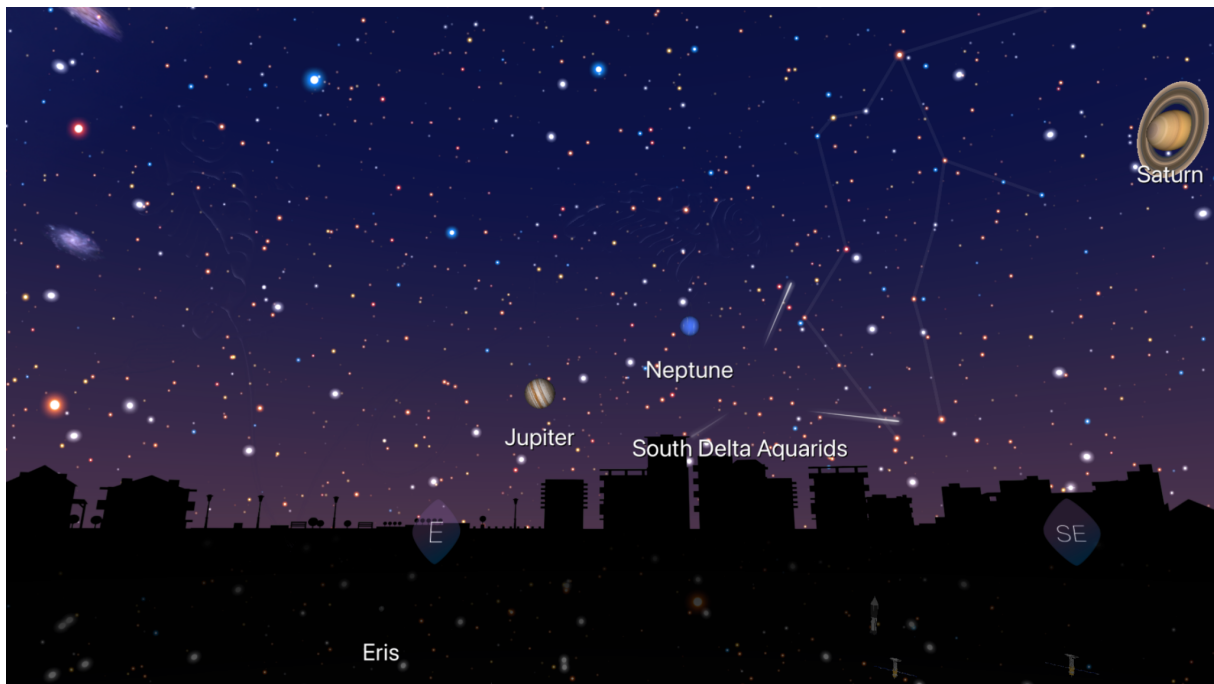


Imatge 2. Captura de pantalla de la meitat del procés

Aquesta imatge va ser enregistrada a la meitat del procés aproximadament, el 16 de juliol (42è dia) a les 23:06, com cada dia, i des del mateix lloc per tenir el mateix punt de referència.

En aquesta captura ja s'aprecia el desplaçament cap a l'est de Saturn, al mateix temps que puja sobre l'horitzó. Aquest moviment des del dia 0 (4 de juny) fins el dia 42 (16 de juliol) és de només $1'40''$ ($42 \cdot 0'0334'' = 1'40''$). També, entre altres elements es veu Neptú, a diferència de la primera fotografia.

I finalment també es pot apreciar Júpiter sota l'horitzó, a punt d'iniciar la seva retrogradació, que començava el dia 28 de juliol. I finalment, es poden veure els satèl·lits STARLINK disposats per tot el pla de la fotografia.

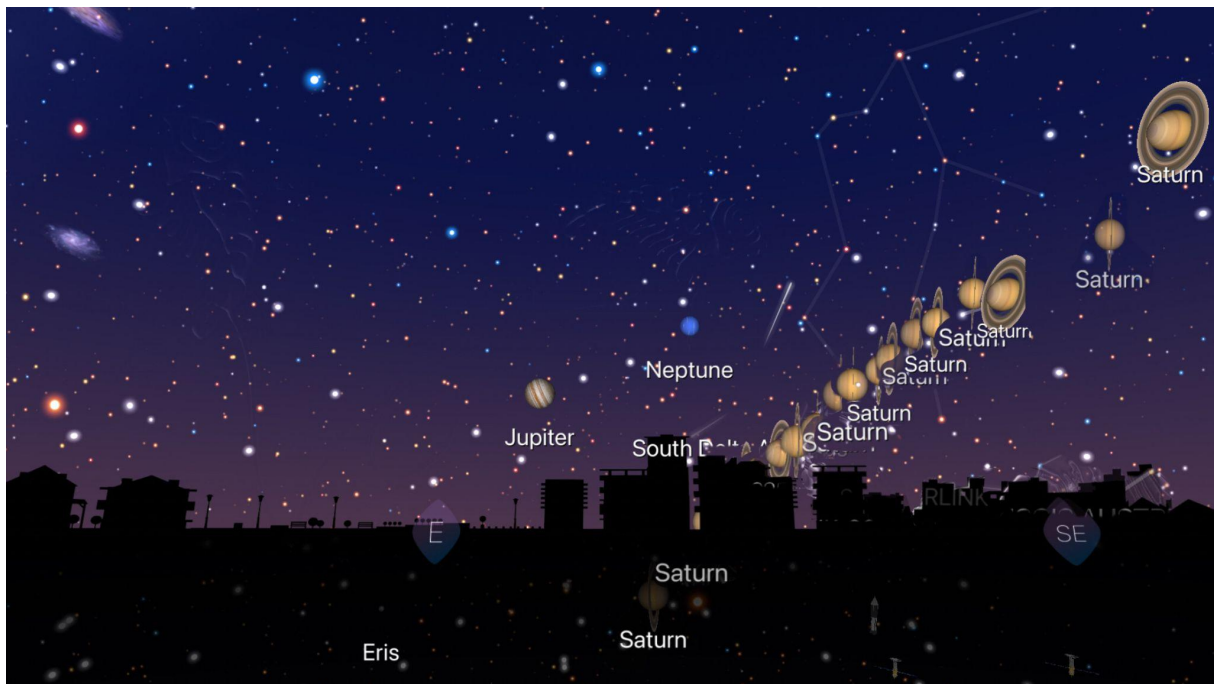


Imatge 3. Última captura de pantalla

Aquesta imatge va ser enregistrada l'1 de setembre a les 23:06, el 87è i últim dia del procés. Des del mateix punt de referència i a la mateixa hora.

Com es pot observar, Saturn es troba al marge de l'abast de la fotografia: cap al nord i direcció a l'est. Però només s'ha desplaçat $2^{\circ}90'$ ($87 \cdot 0^{\circ}0334' = 2^{\circ}90'$) des del primer dia d'observació. Com s'ha mencionat anteriorment, i tal com es mostra en els càlculs fets en la primera part del marc pràctic, en 87 dies

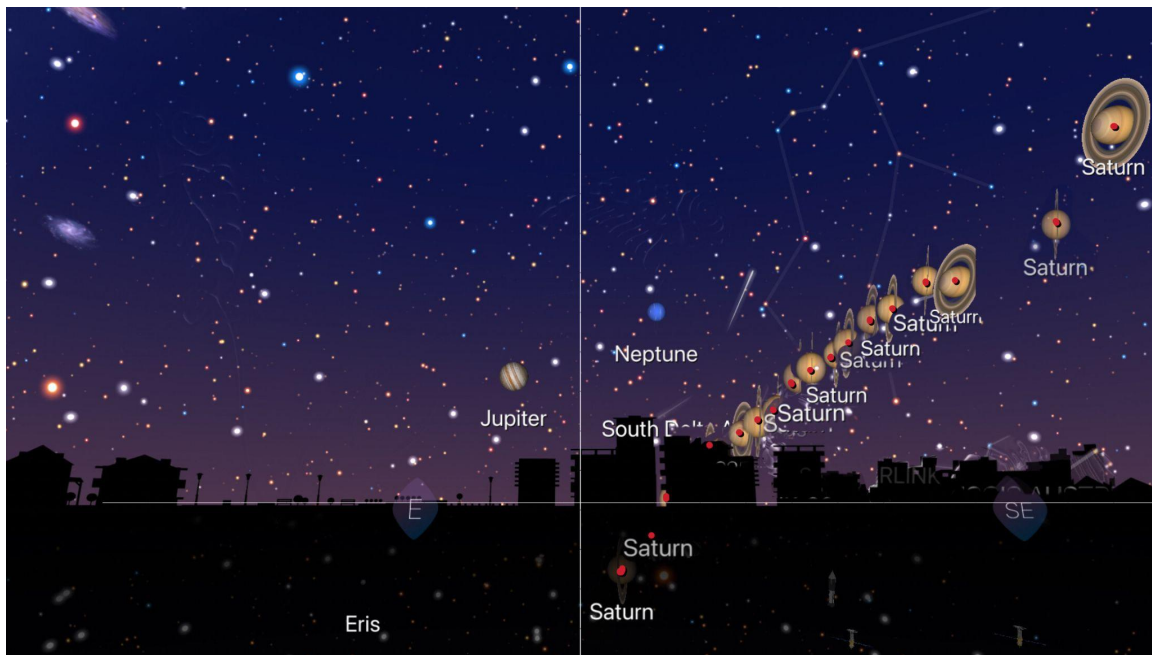
També es poden apreciar Neptú i Júpiter, que en comparació a la fotografia anterior, han variat molt de posició, i Júpiter ja es troba retrogradant.



Imatge 4. Muntatge amb les posicions més significatives de Saturn al llarg de 87 dies

En aquesta imatge es veuen totes les posicions rellevants de Saturn obtingudes en aquest procés, des de la primera del 4 de juny, fins a la darrera de l'1 de setembre. Es pot distingir com avança direcció l'est i al mateix temps al nord.

També es poden apreciar que les imatges dels planetes del final del procés s'inclinen lleugerament més cap al nord, ja marcant l'inici de la forma que suposa el moviment retrògrad. Sobretot l'últim enregistrament, sembla que el desplaçament a l'est comparant amb la resta d'enregistraments sigui menor, i fa l'efecte que ja s'hagi de dirigir (aparentment) a l'oest.

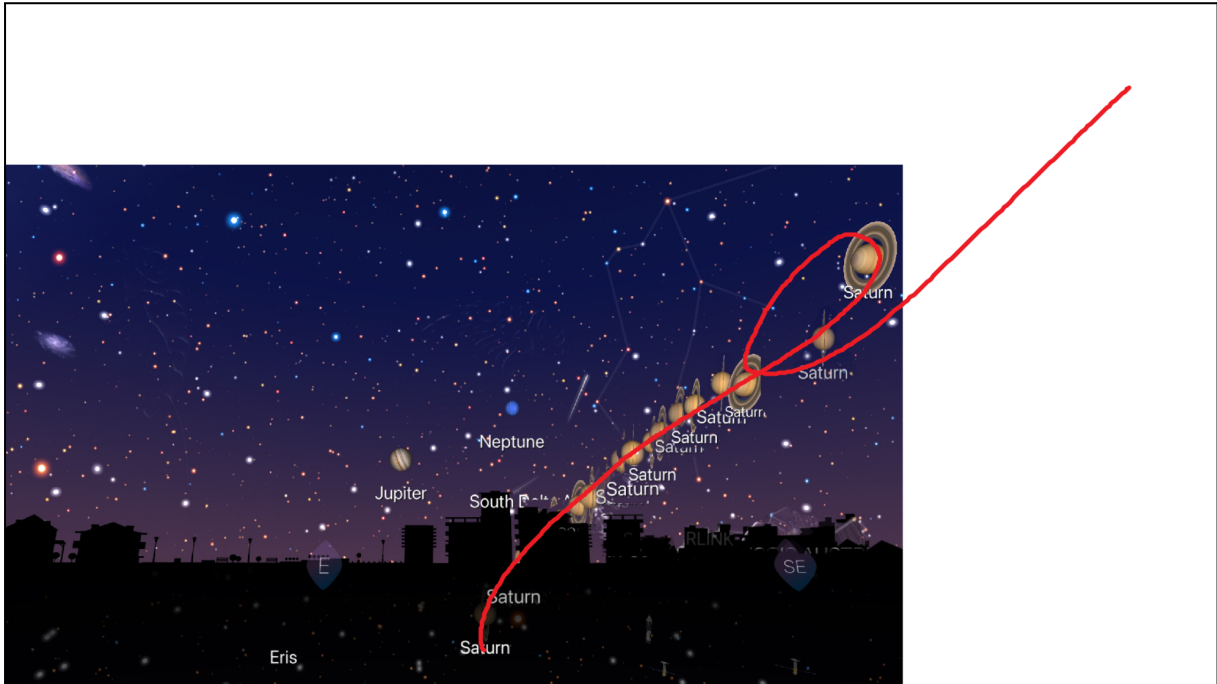


Imatge 5. Muntatge final

Aquesta imatge conté les posicions rellevants de Saturn, com l'anterior, però s'han afegit uns punts vermells que marquen el centre del planeta, perquè destaquí més visualment, també s'han afegit un eix d'ordenades i un altre d'abscisses per diferenciar millor aquest moviment, representant un pla.

2.2 SIMULACIÓ DEL MOVIMENT COMPLET

Com que no s'ha pogut observar el moviment complet, per falta de temps (com abans s'ha esmentat), s'ha decidit simular com hauria d'haver sigut el moviment un cop ha finalitzat la retrogradació. Per fer-ho, s'ha utilitzat una aplicació d'edició senzilla d'ordinador, i només s'ha traçat una corba amb dues formes diferents, un "looping" i una "S"; les dues formes potencialment probables.



Imatge 6. Primera simulació del moviment complet

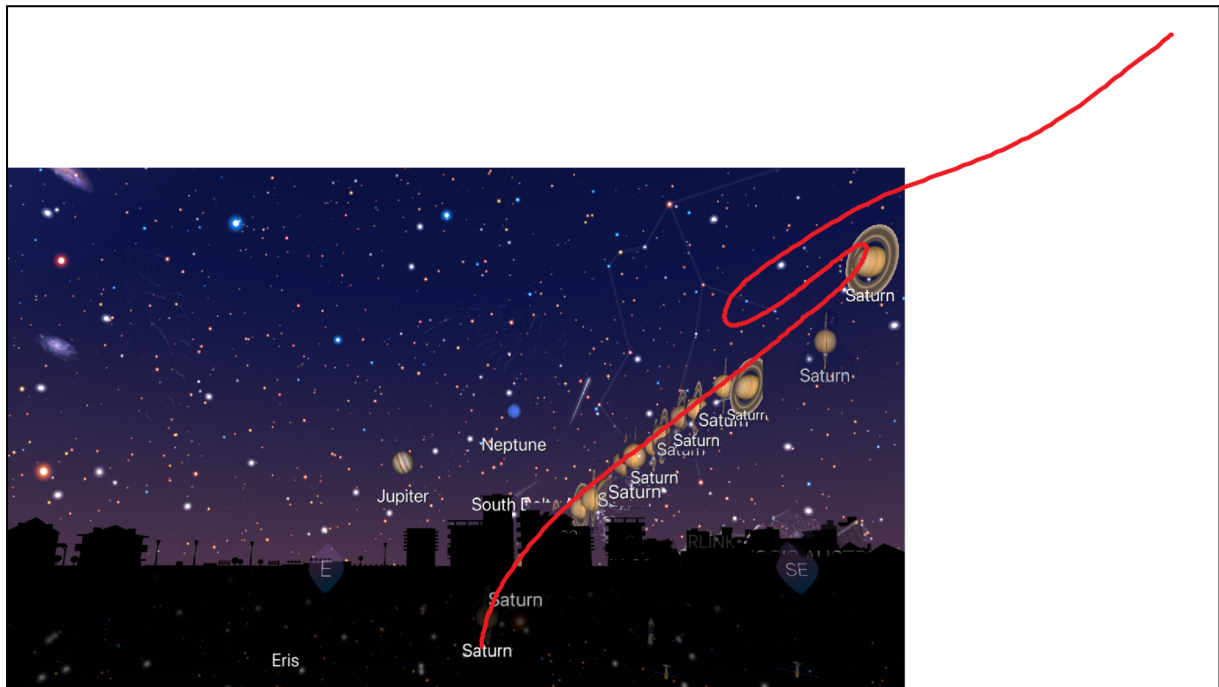
En la primera simulació, s'ha intentat representar una situació hipotètica en la qual Saturn forma un tirabuixó o “*looping*”, una de les dues formes aproximades que podria haver esdevingut aquest moviment si s'hagués observat completament.

Un exemple de planeta que descriu la forma representada anteriorment quan retrograda és Mart, per això és probable que el dibuix de Saturn hagués esdevingut una de semblant.



Fig. 24 Imatge de la retrogradació de Mart

Font: <http://rodamedia.com/foro/viewtopic.php?t=134>



Imatge 7. Segona simulació del moviment complet

En la segona simulació, també hipotètica, s'ha intentat representar la trajectòria en forma de "S"; la segona forma possible.

Un exemple de planeta que segueix la forma abans esmentada quan retrograda és Mercuri.

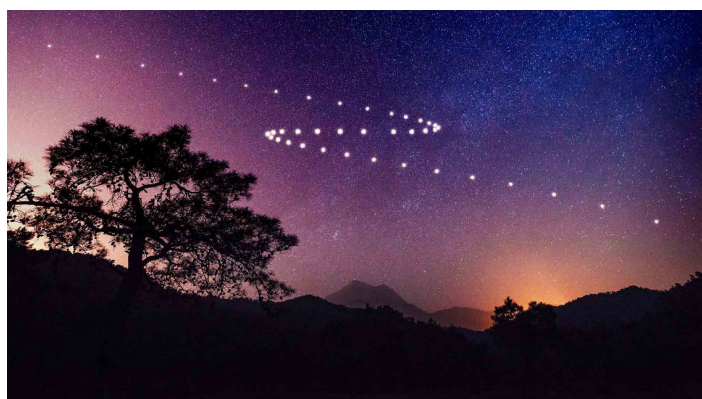
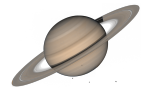


Fig. 25 Imatge de la retrogradació de Mercuri

Font: <https://starwalk.space/es/news/what-is-retrograde-motion>



CONCLUSIÓ

Per finalitzar el treball de recerca cal concloure quelcom amb tota la informació obtinguda tant teòricament, com pràcticament. Per fer-ho em centraré en els objectius primerament plantejats, un a un.

El **primer objectiu** era conèixer la història més general i rellevant de l'evolució del coneixement científic en vers els moviments dels planetes del sistema solar. Després de la recerca bibliogràfica i la recerca a través d'internet, puc dir que aquest propòsit s'ha complert amb èxit. Aquesta finalitat era la més fàcil d'assolir i la més primària per poder avançar en el treball. Personalment, opino que tot descobriment té una història i uns personatges, i especialment en l'àmbit de la ciència, ja que normalment contribueix més d'una persona i en èpoques del temps diferents.

El **segon objectiu** era conèixer i entendre les figures geomètriques que descriuen aquests moviments: còniques. Un cop tota la recerca mitjançant llibres de matemàtiques, exemples dibuixats (figures geomètriques), simulacions interactives i altres fonts, considero com a aconseguit el segon objectiu. S'ha de tenir en compte que la secció cònica amb més rellevància en aquest treball és l'el·lipse, per tant, ha estat la més treballada tant teòricament com pràcticament (tal com es pot veure a la secció dels càlculs de la part pràctica).

El **tercer objectiu** era saber què són els moviments retrògrads aparents des d'un punt de vista matemàtic (geomètric o analític) Conèixer aquest moviment geomètricament és més senzill que des d'un punt analític, perquè només cal dibuixar el context i saber interpretar-lo. En canvi, per fer-ho analíticament, no s'ha de tenir en compte la matemàtica, sinó la física. Com s'ha dit en la part teòrica, el retrogradament no és més que una il·lusió òptica causada per les diferències de les velocitats orbitals dels planetes. Abans de començar la recerca, jo desconeixia aquest fet, i pensava que el moviment es podia justificar mitjançant equacions matemàtiques i potser alguna interpretació més física, per tant, puc concloure que aquest propòsit ha quedat mig assolit. El que sí que s'ha obtingut han sigut les



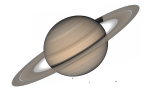
equacions que m'han permès saber quant es mou el planeta en un dia (en graus), però com ara s'ha dit, no han servit per demostrar el moviment retrògrad.

El **quart objectiu** era observar com dos planetes fan el moviment retrògrad aparent i enregistrar-lo. Hi ha una justificació de la tria del planeta a considerar (Saturn) i el planeta finalment descartat (Júpiter). En primer lloc, es van seleccionar dos possibles astres per analitzar, per si per qualsevol qüestió alguna de les dues anàlisis no sortia bé. Però clar, aquest procés dura mesos, i si s'hagués escollit Júpiter no hi hauria hagut prou temps per apreciar un mínim indicatiu de retrogradació. (ja que el moviment en poc temps és negligible). Com que Saturn la iniciava abans, va ser el primer. En veure que les fotografies sortien com estava previst, es va descartar començar l'anàlisi de Júpiter.

Així que aquesta finalitat no s'ha complert amb èxit total, perquè només se n'ha estudiat un dels dos proposats.

El **cinquè i darrer objectiu** era demonstrar mitjançant les fotografies com dos planetes exerceixen el moviment retrògrad aparent. Aquest va molt relacionat amb el quart, perquè anteriorment s'ha afirmat que només se n'ha analitzat un. Ara bé, la durada de les retrogradacions i el temps en què s'ha estat fotografiant difereix molt, perquè les dades obtingudes arriben gairebé a la meitat del procés. Això vol dir que les fotografies presentades a la part pràctica no representen el moviment retrògrad complet per falta de temps (finalitza aproximadament a novembre, com s'ha esmentat anteriorment). Tot i que es pot apreciar com els últims enregistraments del planeta van lleugerament més cap al nord que la resta per formar la corba que finalment hauria d'esdevenir un tirabuixó, o una corba en forma de "S" (com es mostra en les simulacions del moviment complet)

Així mateix, tal com s'ha dit en la metodologia, les dates de les retrogradacions canvien, i els planetes que són més senzills d'observar com ara Mart o Mercuri, perquè tenen un procés de retrogradació més curt, van finalitzar-les a principis del 2022. En conseqüència, m'ha tocat analitzar un planeta no òptim per aquest tema.



Per tant, com que no s'ha demostrat el procés de Saturn mitjançant les fotografies, s'ha intentat mostrar a l'apartat 2.2 dins de la part pràctica, com hauria d'haver sigut aquest, si s'hagués tingut temps per veure'l complet.

I per acabar, m'agradaria relacionar tots els conceptes treballats en aquest dossier, per lligar-ho tot i donar-li un sentit que vagi més enllà de la recerca. El que he estat fent jo experimentalment durant només 87 dies (més aviat, durant 87 nits), va ser el que molts científics van fer durant anys per obtenir dades i informació sobre tot això que ens envolta i tant desconeixem.

Aleshores, el que ha suposat aquest estiu per mi, ha sigut una minúscula part del que va suposar un gran avenç en la història de la ciència, i en la ciència en general.



TAULA DE FÓRMULES

(1) $\frac{T^2}{r^3} = K$
(2) $c^2 = b^2 + a^2$
(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(4) $y^2 = 2px$
(5) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
(6) $\text{dist}(PF) + \text{dist}(PF') = 2a$
(7) $a^2 = b^2 + c^2$
(8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(9) $K = \frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r}$
(10) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
(11) $v = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$
(12) $\omega = \frac{2\pi}{T}$

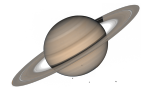


WEBGRAFIA

- Amenábar, A. (Director). (2009). *Ágora* [Film]. Telecinco cinema.
- Asimov, I. (1988). *El nostre sistema solar* (L. Roura, Trans.). Cruïlla.
- *Blink Activity*. Blink Activity | BlinkLearning. Visitat el 4 d'Agost de 2022, de <https://www.blinklearning.com/coursePlayer/clases2.php?idclase=90924370&idcurso=1585420>
- Bonet, G. (n.d.). *Les còniques – GeoGebra - Paràbola*. GeoGebra. Visitat l'11 d'Abril de 2022, de <https://www.geogebra.org/m/SCnHandY>
- Enciclopèdia. *geocentrisme* | *enciclopèdia.cat*. Enciclopèdia.cat. Visitat el 3 de març 3 de 2022, de <https://www.enciclopedia.cat/ec-gec-0111764.xml>
- Fernández, J. L. *Leyes de Kepler - Gravitación Universal*. Fisicalab. Visitat l'11 d'Abril de 2022, de <https://www.fisicalab.com/apartado/leyes-kepler>
- Gabàs, J. (2016). *El sistema solar*. RBA.
- Macho, M. (2015, Juny 15). *Hipatia*. Mujeres con ciencia. Visitat l'11 d'Abril de 2022, de <https://mujeresconciencia.com/2015/06/15/hipatia/>
- *Movimiento retrógrado de los planetas* | *¿Cómo se mueven los planetas en el cielo?* (2020, April 12). YouTube. Visitat el 19 de Juliol de 2022, de <https://www.youtube.com/watch?v=2ehlcL9X1g>
- Nevot Luna, A. (2019). *Matemàtiques I*. McGraw-Hill/Interamericana de España. S.L.
- *òrbita* | *enciclopèdia.cat*. (n.d.). Enciclopèdia.cat. Visitat el 21 d'Abril de 2022, de <https://www.enciclopedia.cat/gran-enciclopedia-catalana/orbita-1>



- *Qué es el movimiento retrógrado | Mercurio retrógrado en 2022 | Cuándo se pondrá Mercurio retrógrado.* (2022, March 30). Star Walk. Visitat el 19 de Juliol de 2022, de <https://starwalk.space/es/news/what-is-retrograde-motion>
- Stellarium. (2001). *Stellarium*. Stellarium Astronomy Software. Visitat l'11 d'Abril de 2022, de <https://stellarium.org/es/>
- Vocabulari. (2022). *Definició de geocentrisme*. DEFINICIÓ DE GEOCENTRISME - VOCABULARI - 2022. Visitat el 3 de març de 2022, de <https://ca.emsayzilim.com/definici-n-de-geocentrismo>



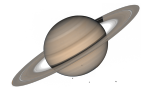
ANNEXOS

ANNEX 1



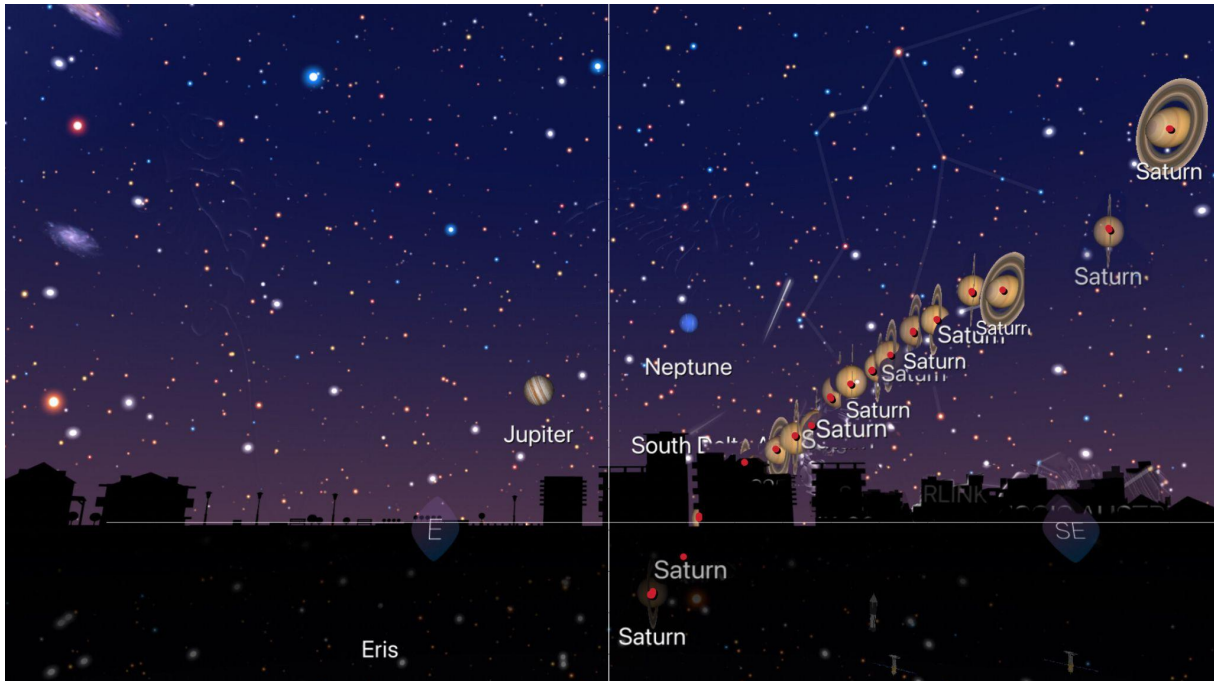
Crédit & Copyright: [Tunc Tezel \(TWN\)](#)

Imatge del moviment retrògrad aparent de Mart
Font: <https://www.apod.cat/mart-retrograd>



ANNEX 2

Vídeo de creació pròpia de la transició d'imatges obtingudes al llarg de la part pràctica: <https://youtu.be/rIGjvN58yvs>

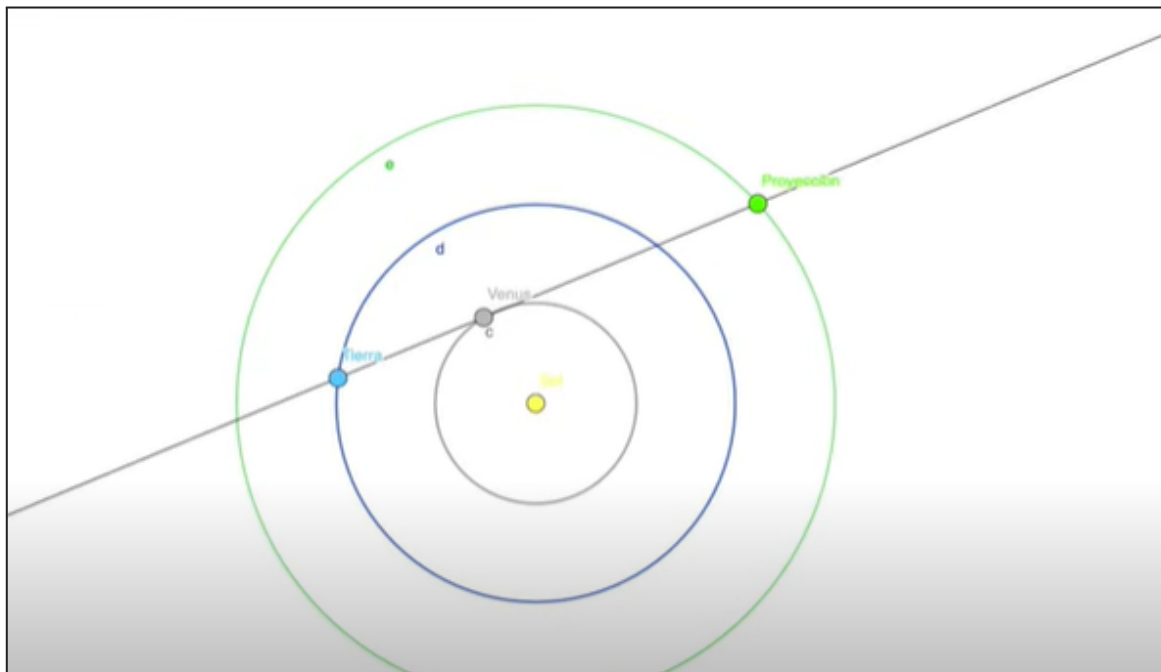




ANNEX 3

Vídeo didàctic de la representació del moviment retrògrad aparent amb GeoGebra:

<https://www.youtube.com/watch?v=2ehlcnL9X1g>

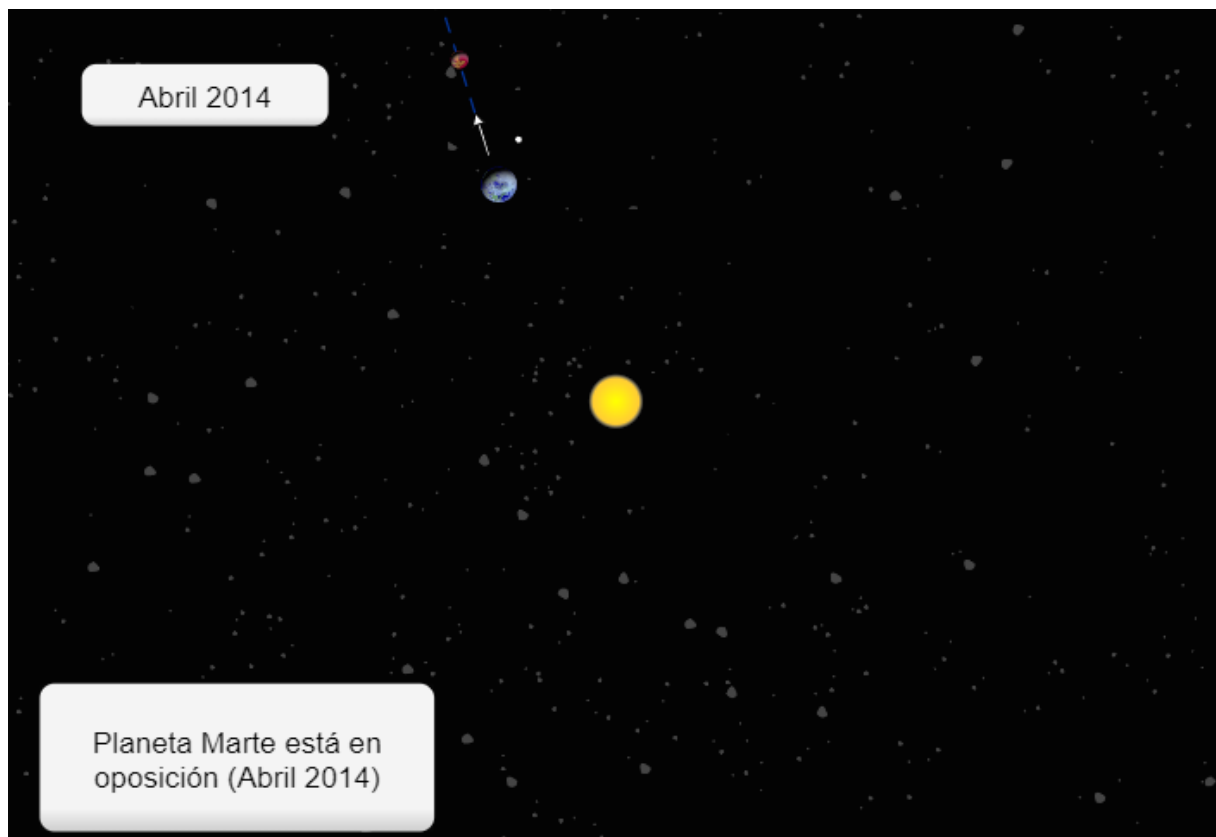


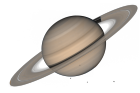


ANNEX 4

Simulació interactiva del moviment retrògrad

<https://www.edumedia-sciences.com/es/subscribe/>





ANNEX 5

CAPVT XVIII.
Examem duodecim locorum
acronychiorum per inven-
tam hypothefin.

A TAR autem ea calculi forma,
quam supra cap. iv explicavi
quod fit compendiosior. Cer-
tum autem est in COPERNICA-
NA seu TECHNICA FORMANON
fesquicupulum (imo minus aliquid) vel
lucratum vel perditū iri, ut ibidem monui.

	Anno 1580	Anno 1585	Anno 1587	Anno 1589	Anno 1593	Anno 1595	Anno 1597	Anno 1600	Anno 1602	Anno 1604
<i>Alph. anno 1587</i>	28.48.55.6	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.48.55
<i>Moventur annuiter in meridie</i>	6.42.	2.14	0.	2.15	6.48.	9.14	11.30.	13.43.	15.56.	18.11.
<i>Alph. anno lapen-4</i>	4.28.44.27.	4.28.48.55	4.28.48.55	4.28.51.10.	4.28.55.43.	4.28.58.9.	4.29.0.25.	4.29.2.38.	4.29.4.51.	4.29.7.6.
<i>Longitudo media</i>	3.9.2.4.55.	4.20.8.19.6.	0.47.40.	7.14.18.26.	1.9.5.5.4.	1.7.14.9.	2.23.11.56.	4.3.5.50.	5.14.59.37.	6.27.0.12.
<i>Alde</i>	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.
<i>Corra. Et long med 1.</i>	25.53.26.	4.20.12.14.	6.0.51.35.	7.14.22.21.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.	3.55.
<i>Ergo angulus C</i>	87.11.13.	8.14.27.	32.2.40.	75.3.1.11.	1.9.58.59.	1.7.18.4.	2.23.15.51.	4.3.39.45.	5.15.3.32.	6.27.4.7.
<i>Sinus</i>	99880	75767	7232	7232	11.3.16.	11.40.5.	65.44.34.	24.22.53.	15.58.41.	57.57.1.
<i>Excentricitas equanti.</i>	7.232	14909	53078	96833	19174	92934	91171	41280	27528	84759
	65088	50624	36160	65088	65088	65088	65088	28928	14464	57856
	6509	3616	2169	4339	6509	1446	6509	723	5062	2893
	579	651	36	578	651	651	651	145	362	506
	58	43	6	14	43	22	51	58	14	36
	7.23	1078	3837	2	1387	6721	6593	2985	1991	6130
<i>Pars equation.</i>	4.8.33.	0.37.4	2.11.57	7002	0.47.42.	3.51.14.	3.46.50.	1.42.40.	1.8.26.	3.30.32.
<i>Angulus B</i>	91.19.46.	7.57.23.	29.50.43.	4.0.55.	11.50.58.	107.48.51.	61.57.44.	22.40.13.	14.50.15.	54.26.9.
<i>Dimid.</i>	44.20.7.	3.58.42.	14.55.21.	71.30.16.	168.9.2.	53.54.26.	30.58.52.	11.20.6.	7.25.8.	27.13.5.
<i>Tangent.</i>	97706	79643	79643	35.45.8.	61.47.44.	137171	60045	20046	13021	51433
<i>Quotus qui prodit ex divisione differentie sa- rum in secundum</i>	79643	6955	26650	72002	84.4.31.	137171	60045	20046	13021	51433
	716787	47786	159286	557501	716787	0796430	477858	159286	079643	398215
	58750	7168	47786	15929	477858	238929	00318	319	23893	07964
	5575	398	4779	06	23893	55750	40	48	159	3186
	48	40	398	06	478	557	08	24	08	239
<i>Tangent.</i>	778160	5539	21225	57349	767440	109247	47822	15965	10370	409628
	37.53.22.	3.10.15.	11.59.0.	29.49.54.	82.34.30.	47.31.49.	25.33.30.	9.4.14.	5.55.14.	22.16.32.
	44.20.7.	3.58.42.	14.55.21.	35.45.8.	84.4.31.	53.54.26.	30.58.52.	11.20.6.	7.25.8.	27.13.5.
<i>Ang. ad A</i>	82.13.29.	7.8.55.	26.54.21.	65.35.2.	117.50.24.	166.39.1.	101.26.15.	20.4.20.	13.20.22.	49.29.37.
<i>Abielium</i>	148.42.13.	148.46.41.	148.48.55.	148.51.10.	148.53.27.	148.55.43.	148.58.9.	149.2.38.	149.4.51.	149.7.6.
<i>Locus in</i>	6.28.44. II	21.37.46.8.	25.43.16.11.	4.26.12.11	16.43.51.7.	12.16.41.3.	17.31.54.8	8.38.18.8.	12.25.13.11.	18.36.43.2.
<i>Diect</i>	6.28.35.	21.36.10.	25.43.0.	4.24.0.	14.26.43.0.	12.16.0.	17.31.40.	8.38.0.	12.27.0.	18.37.10.
<i>Different.</i>	0.9.	1.36	0.16	2.12.	Diff. 0.51.	0.42.	0.14.	0.18.	1.47.	0.27.

Vides igitur, studiose lector, hypothefin hanc METHODO superio-
ri investigatam, non tantum fundamenta sua quatuor vicissim per cal-
culum retinere, sed etiam reliquas omnes observationes intra duo
scrupula tenere; quam quidem magnitudinem semper stella hac in a-
cronychieo fitu amplitudine corporis occupat & excedit. Quo argu-
mento cognoscitur, si quis superiorem METHODVM repetat assumptis
aliis
K



ANNEX 6

