

JAUME CAMPRUBÍ

EL SISTEMA EDUCATIU: LA DEMOSTRACIÓ INACABADA

UN VIATGE PER LES MATEMÀTIQUES I L'EDUCACIÓ



**TUTORS: JORDI LAGARES, JOSEP PALMADA
I ARMENGOL GASULL**

EL SISTEMA EDUCATIU: LA DEMOSTRACIÓ INACABADA

UN VIATGE PER LES MATEMÀTIQUES I L'EDUCACIÓ

Jaume Camprubí Juanola
2n A Batxillerat

Tutors: Jordi Lagares, Josep Palmada i Armengol Gasull
INS Pla de l'Estany

Banyoles, 6 d'Octubre de 2019

Pròleg

“He après que la gent oblidarà el que els has dit, oblidarà el que has fet, però no oblidarà mai com els has fet sentir.”

Maya Angelou

Quan en Jaume em va proposar escriure-li el pròleg del seu treball de recerca vaig estar pensant en què hi escriuria i què volia reflectir amb les meves paraules ja que considerava molt important realitzar bé aquesta tasca. Després de donar-hi moltes voltes vaig pensar que el més adient seria dir què m’havia fet sentir la lectura del treball, perquè la veritat és que no em va deixar indiferent.

El primer que vaig experimentar és admiració en tant que considero que pot ser un veritable repte parlar dels temes que tracta l’autor del treball. Mostra des de la primera pàgina fins a l’última que ha fet una recerca per conèixer tot allò del que anava a parlar. A més, ho ha fet des d’una doble visió -el punt de vista de diversos professionals i el punt de vista de tots aquells estudiants que han sigut també, participants del treball-. Tanmateix, quan anava llegint pàgina rere pàgina sentia orgull perquè ensenya com és capaç de lluitar per allò que creu i això, com ens ha demostrat la història en moltes ocasions, pot arribar a canviar el món. A més, ho ha fet dedicant cada pàgina del seu treball a intentar millorar quelcom que a tots ens involucra i que ens hauria d’importar. Estem parlant d’educació.

Avui dia existeixen llibres sobre com tractar els estudiants i com comprendre’ls, com ensenyar, com avaluar tot allò que saben, etc. Però potser ens faltaria també, centrar-nos en què senten els alumnes, com entenen l’ensenyament tot tenint en compte la seva visió per poder avançar. Si el treball que té entre les mans es tractés d’un llibre publicat podria ser perfectament una obra que hauria de ser llegida per aquells que es dediquen o es volen dedicar a l’ensenyament pel simple fet que mostra la visió i la voluntat per part d’un alumne de voler saber més, a més d’interessar-se pel món de l’educació per tal de proposar canvis adients a aquesta societat, cada cop més voluble, i també aportar solucions a aquelles carències que podem trobar en el sistema educatiu. Tot des d’un punt de vista estudiantil òbviament, ja que no hem d’oblidar que es tracta d’un alumne de batxillerat.

L'autor té present com s'ha sentit en alguns moments de la seva vida i les lliçons que ha anat aprenent durant aquests anys. Tal i com es percep amb la oració de Maya Angelou -que encapçala el pròleg- és el que restarà dins nostre i el que veritablement ens marcarà -per això ell ens fa quatre pinzellades de les seves experiències-. Algunes de les esmentades en el TDR són: les diferents demostracions matemàtiques, la recerca de bolets amb el seu avi, entre d'altres. I el que vol transmetre és que hem de saber connectar amb els estudiants que tenim a davant i donar sentit a tot allò que els hi ensenyem.

Però el més meravellós és com ho fa a través de paral·lelismes i metàfores que l'autor va narrant fent encara més imaginativa la tasca de concienciar a la societat sobre allò de que tracten cada un dels capítols. Per tant, com a professora de castellà em fascina veure com números -primera part del treball- i lletres -amb la infinitat de figures retòriques que utilitza en Jaume- es fusionen per fer d'aquest treball una lectura que no passarà desapercibuda.

Desitjo que gaudeixin i assaboreixin cada frase del treball perquè en cada una d'elles s'amaga la crítica, la il·lusió i la força d'un estudiant per marcar un abans i un després.

Melanie Ortiz
Professora de secundària.

Índex

1- Introducció.....	6
2- Objectius i metodologia del treball	7
3- Demostracions matemàtiques	
3.1- Introducció a les demostracions.....	8
3.1.1- Una història de quadrats i triangles rectangles	8
3.1.2- Què? Com? i Per a què?.....	9
3.1.3- La visió dels estudiants.....	10
3.2- Selecció de demostracions.....	15
3.2.1- Una pregunta amb resposta sorprenent.....	15
3.2.2- Infinites nombres primers.....	15
3.2.3- El forat dels nombres primers.....	16
3.2.4- π és l'estrella.....	16
3.2.5- El descobriment de Viviani.....	17
3.2.6- La fórmula d'Euler: $c+v=a+2$	18
3.2.7- Els 5 poliedres regulars.....	22
3.2.8- La fórmula de Pick.....	26
3.2.9 -El teorema de Pitàgores.....	28
3.2.10- Volum de l'esfera.....	30
4- El sistema educatiu	
4.1 - Introducció: L'opinió de la gent.....	33
4.2- Enquestes.....	35
4.2.1- Introducció a les enquestes.....	35
4.2.2- Resultats de les enquestes.....	36
4.3- Reflexions.....	45
4.3.1- L'escola de la memòria.....	45
4.3.2- Investiguem allò que ens interessa.....	52
4.3.3- Molta intel·ligència, però poca d'emocional.....	56
4.3.4- La importància del sentit.....	61
4.3.5- Buscant bolets amb l'avi.....	66
5- Conclusions.....	69
6- Agraïments.....	71
7- Bibliografia i Webgrafia.....	72
8- Annex: animació i entrevista.....	75

1- Introducció

Benvingut siguis al meu treball, lector/a. Potser estàs llegint això perquè t'ha arribat l'animació que he fet (si no l'has vist ves al codi QR de l'annex), t'ha encuriós el tema o simplement perquè ets membre del jurat i et toca llegir-lo per força. Sigui quin sigui el cas, en les següents 75 pàgines faràs un viatge per l'educació i les matemàtiques. Tanmateix, no serà de la manera que estàs acostumat/da a veure-les a l'escola perquè el que t'ensenyaré no es pregunta en un examen sinó que et servirà a tu per a fer-te preguntes. Et mostraré el món de les demostracions matemàtiques, unes eines molt poderoses per a entendre per què les fórmules que estudies són com són i també veuràs què en saben els alumnes d'elles.

Acabat això, procedirem a passejar pel sistema educatiu. Veurem l'opinió que en té la gent (a través dels resultats de les enquestes) i, a continuació, intentarem analitzar els problemes que aquest té i a proposar-hi solucions. Per fer-ho viatjarem per la memòria, l'interès, les emocions, el sentit i la paraula "entendre" abans d'acabar el trajecte enmig del bosc caçant bolets amb l'avi.

Ara que saps què farem, pots decidir si seguir avançant o tancar el treball. Si segueixes llegint, fes-ho a fons i essent conscient que escriure'l no ha estat fàcil. Fer una lectura ràpida a la introducció, saltar-se tots els capítols del mig i anar directament a les conclusions seria com passar de l'hivern a l'estiu sense gaudir de la primavera així que, si penses fer això, et demano que reconsideris la teva decisió de seguir llegint.

Ara que sé que has decidit seguir aquí, t'explicaré el perquè d'aquest tema i no qualsevol altre. Abans de decantar-me per aquest tenia diverses opcions i estava indecís, dubtava entre la música, l'alimentació, l'esport i la sociologia. Finalment els professors em van proposar fer una ullada per Internet a veure què trobava i a la web del programa Argó de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) vaig veure el tema de demostracions matemàtiques i el vaig triar. Des de la universitat em van ajudar i vaig anar fent el meu treball. Més tard vaig decidir ampliar el tema i incloure-hi quelcom relacionat amb l'educació i la divulgació ja que són temes que m'interessaven molt.

El resultat de tot això és aquest treball, on he mesclat matemàtiques, sociologia, filosofia i una mica de dibuix i animacions.

Si l'hagués de resumir en una frase de sis paraules sens dubte seria:

Un retrat del meu món interior

Espero que t'agradi.

2- Objectius i metodologia del treball

Els objectius d'aquest treball són els següents:

- 1- Cercar què són les demostracions, per a què serveixen, per què són necessàries, quins mètodes hi ha i aprendre'n a fer.
- 2- Investigar l'opinió de la gent sobre el sistema educatiu i intentar entendre els motius pels quals l'opinió és la que és.
- 3- Localitzar els problemes que té l'educació actualment i proposar possibles solucions.
- 4- Fer arribar a altra gent el que he après, les meves reflexions i les idees sobre l'educació que m'han arribat d'altres persones amb més formació que jo.

Per a assolir tots aquests objectius he fet el següent:

- 1- Cercar informació sobre demostracions matemàtiques i sobre el sistema educatiu. M'he centrat sobretot en fer enquestes, entrevistes, en parlar amb professionals (tant de l'educació com de les matemàtiques) i en buscar estudis i experiments que donessin suport als meus raonaments.
- 2- Treballar aquesta informació per a poder trobar els punts més problemàtics, analitzar-los, extreure'n conclusions i proposar millores.
- 3- Buscar maneres per a divulgar les meves reflexions. En aquest cas, a més a més del treball, he optat per a fer una animació [A1] amb el programa "Opentoonz".

3- Bloc matemàtic

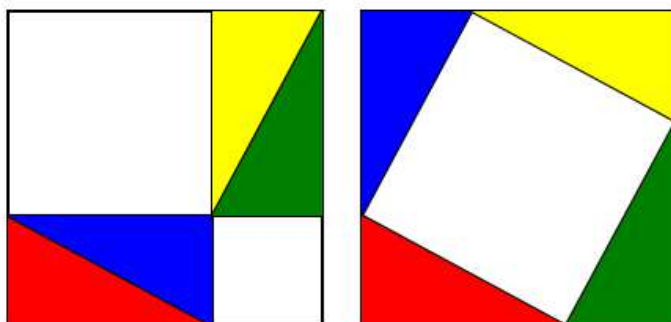
3.1- Introducció a les demostracions matemàtiques

3.1.1- Una història de quadrats i triangles rectangles

El primer cop que vaig veure una demostració matemàtica va ser al quart curs de l'educació secundària obligatòria (ESO). El meu professor Jordi Lagares (tutor d'aquest treball) ens va ensenyar la seva web, que l'anomenava "*la página más famosa del mundo entero y parte del extranjero*" ([LaJo]) on hi havia tot el contingut que faríem durant el curs a més a més d'opinions personals i altres recursos educatius. A la pàgina principal hi havia una imatge que, si et posaves a sobre amb el ratolí, anava canviant. En aquell moment no l'entenia: senzillament veia triangles rectangles i quadrats que junts formaven un altre quadrat més gran. Llavors el professor va preguntar si enteníem què volia dir allò. Ningú va dir res. Jo vaig seguir-hi pensant tota la tarda però no vaig trobar la resposta: seguia sense entendre-ho. L'endemà un company va dir que havia buscat el significat de la imatge i ens el va explicar a tots: resulta que demostrava el teorema de Pitàgores. Ningú de la classe havia sabut reconèixer una fórmula que havia fet servir des de 2n d'ESO perquè estava explicada en forma de dibuix.

En aquell moment em vaig adonar que ningú ens havia explicat les matemàtiques d'aquella manera, mai cap professor ens havia fet una demostració i vaig veure que la manera com s'estava ensenyant l'assignatura era com mirar una representació de marionetes: veus l'espectacle però no veus com i per què es mouen els fils.

En aquesta primera part matemàtica intentarem fer precisament això, entendre què són les demostracions, per a què serveixen, per a què són necessàries, quina opinió tenen i què en saben els alumnes sobre les demostracions i, finalment, demostrarem una selecció de teoremes entre els quals n'hi ha alguns que s'ensenyen a l'ESO i a 1r de Batxillerat.



3.1.2- Què? Com? i Per a què?

A l'apartat anterior hem descobert que el dibuix de la web era la demostració del teorema de Pitàgores. Però, realment què és una demostració matemàtica? Com podríem definir-ho?

El diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans (DIEC2) ens dona dues definicions de caire matemàtic:



The screenshot shows the dictionary entry for 'demostració' on the DIEC2 website. At the top, there is a red navigation bar with 'Resultats: 1 al 1', '(1 registres)', and 'Imprimir la llista'. Below this, the word 'demostració' is displayed in a grey box. To the right of the word are several buttons: 'DDL', 'CTILC', 'DCVB', 'Sinònims', 'CIT', and 'imprimir'. The main content area contains the following text:

demostració

1 1 f. [FS] [MT] Raonament amb què es demostra o fa evident quelcom. *Una demostració rigorosa, matemàtica. La demostració d'un teorema. Demostració per reducció a l'absurd.*

1 2 f. [MT] Derivació d'un enunciat mitjançant l'aplicació d'unes determinades regles lògiques, a partir d'unes premisses.

2 1 f. [LC] Manifestació exterior de sentiments, d'intencions, de disposicions, que hom té o afecta de tenir. *Demostracions d'amistat, d'afecte, de respecte. Demostracions hostils.*

2 2 f. [LC] Exhibició a tall d'exemple, d'instrucció.

2 3 [DE] **fer una demostració sobre un punt** Portar-hi forces per intimidar l'enemic o distreure l'atenció de l'enemic del punt que s'intenta realment atacar.

La primera: “Raonament amb què es demostra o fa evident quelcom.

La segona: “Derivació d'un enunciat mitjançant l'aplicació d'unes determinades regles lògiques, a partir d'unes premisses.”

Per tant, si combinem les dues definicions podem dir que:

Una demostració matemàtica és un raonament lògic que, a partir d'unes premisses, fa evident un resultat.

Un cop sabem què són, hem de saber que no hi ha una única opció a l'hora de fer demostracions matemàtiques. N'hi ha diverses i, fins i tot, és possible demostrar el mateix teorema de maneres diferents. Segons Carlos Morales ([MoCA]) els mètodes més comuns per a fer demostracions són 3: mètode directe, mètode indirecte (on s'hi inclouen la reducció a l'absurd i la contrapositiva) i el mètode d'inducció (explicat segons Brian Davey [DavB]). Els explicarem sense entrar en detalls molt profunds per a facilitar la comprensió del lector no especialitzat en matemàtiques.

Mètode directe:

En aquest tipus de demostracions, partim d'una sèrie de premises que suposem que són veritat i una conclusió que volem demostrar. Si a partir d'aquestes premises podem elaborar una sèrie de conseqüències lògiques que ens portin a corroborar la conclusió, aquesta serà vertadera. Aquest mètode es basa en el que en lògica s'anomena *Modus Ponens*. Això vol dir que si d'un enunciat P se'n deriva una conseqüència Q, si P és veritat, llavors Q també ho és.

Mètode indirecte:

A vegades les premises no permeten fer una demostració directa i llavors es fa servir el mètode indirecte. Té dues tècniques principals: la reducció a l'absurd i la demostració contrapositiva.

Reducció a l'absurd:

Partim d'una sèrie de premises i d'una conclusió que volem demostrar. El primer pas és suposar que la conclusió és falsa. Llavors, fent servir les premises que tenim arribem a una contradicció. Per tant, la condició inicial era certa. Aquest mètode es basa en dos principis: el principi de no contradicció, que diu que una proposició no pot ser vertadera i falsa a la vegada, i el principi del tercer exclòs, que diu que una proposició o és vertadera o és falsa.

Contrapositiva:

Aquest mètode de demostració es basa en l'equivalència lògica $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$.

Això vol dir que si, i només si la proposició P implica la conseqüència Q, negar la conseqüència Q implicarà negar la proposició P. Per a fer una demostració d'aquest tipus, es nega la conseqüència Q, que implica negar la proposició P i es mira si negar P és cert.

Inducció:

Aquest mètode el podem pensar com unes peces de dòmino col·locades en equilibri. El que volem aconseguir són dues coses: una és una manera de tombar la primera peça i l'altra és assegurar-nos que quan tombem la primera, la segona caurà i així successivament. Més formalment, el que volem demostrar és que si cau la peça K del dòmino (és a dir, la igualtat es compleix per a $n=1$ i per a $n=K$ on n i K són qualsevol número natural), la peça següent (que compleix la igualtat per a $n=K+1$) també caurà.

A més a més d'aquests mètodes, a vegades les demostracions es poden fer de manera més gràfica amb l'ajuda de dibuixos. És el que es coneix com a "demostracions sense paraules".

Encara que aquests mètodes que hem vist semblen que són "ràpids" i que és "fàcil" demostrar quelcom, la veritat és que normalment es necessita un temps perquè la hipòtesi que s'ha proposat es validi i perquè passi de ser una conjectura a un veritable teorema. Un clar exemple d'això és el que en castellà es coneix com a "teorema del panal":

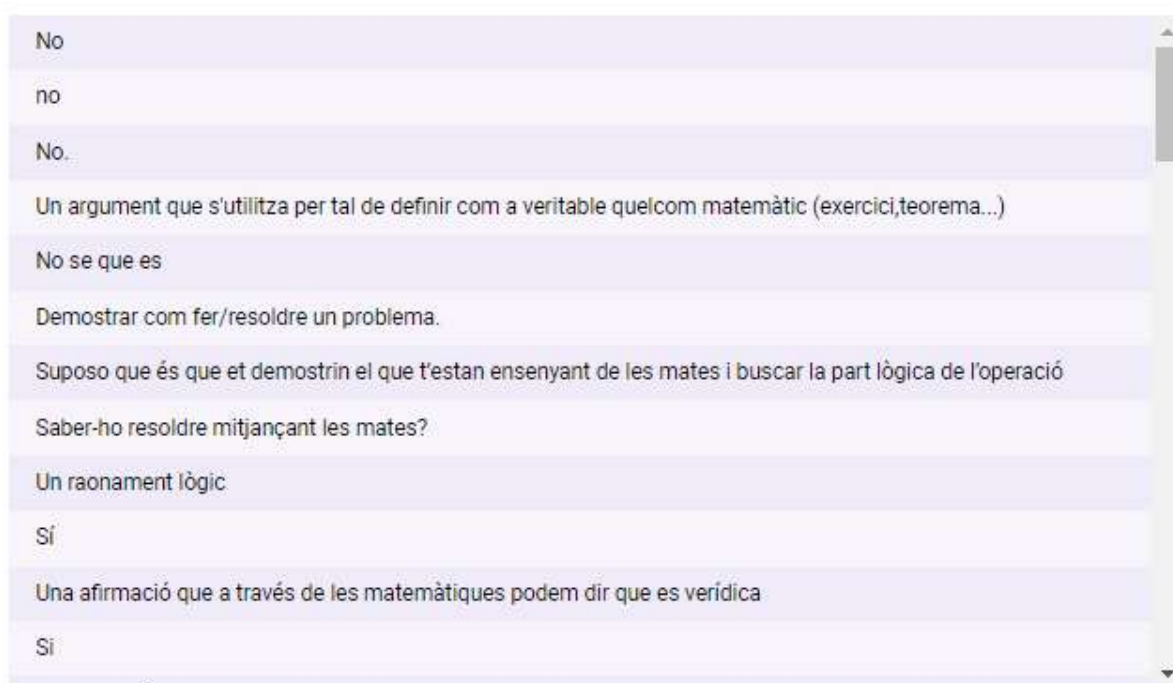
Imaginem, per exemple, que vull recobrir una superfície plana amb peces iguals sense deixar forats. Podria fer servir quadrats o triangles però si el que vull és tessellar-la de la manera més eficient el que he de fer servir són hexàgons. Aquesta resposta la va donar Pappos d'Alexandria l'any 300 d.C., però no la va demostrar. El seu resultat es va quedar en una conjectura fins que gairebé 1700 anys després, l'any 1999, Thomas Hales el va aconseguir demostrar. A partir de Hales, l'hexàgon s'ha convertit oficialment en la forma geomètrica més òptima per a recobrir superfícies planes.

Com hem vist, les demostracions són imprescindibles per a convertir una conjectura en un teorema (Eduardo Sáenz [SET1]) i fer que el resultat es consideri veritable per sempre més. Però no només això, les demostracions també serveixen per a entendre perquè la hipòtesi que hem formulat és correcta. Milloren la nostra comprensió sobre el tema i és per això que són tan importants. És aquesta la raó per la qual a l'institut, sobretot a partir de 3r d'ESO, s'haurien de fer més demostracions, així els alumnes entendrien per què les fórmules que fan servir són com són i no es limitarien a memoritzar-les sinó que les comprendrien.

3.1.3- La visió dels estudiants

Com que en aquest treball, a més a més de les matemàtiques, hi ha un bloc dedicat a l'educació, vaig pensar que seria interessant investigar què en saben els estudiants de les demostracions, així que vaig enviar una enquesta i vaig rebre un total de 87 respostes.

La primera pregunta era si sabien què és una demostració matemàtica i, en cas afirmatiu, que ho expliquessin breument. A la imatge veiem algunes de les respostes que s'han donat.

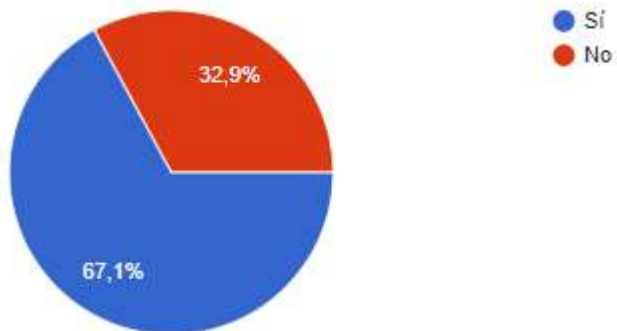


El 62% de les persones que van contestar van dir que sí que sabien què és una demostració i van donar una definició. Un 15% va dir que sí però no va donar cap definició i el 23% restant va contestar que no.

De les 40 respostes que van contestar "sí" només n'hi havia 4 que definissin el concepte amb claredat i de manera correcta. Tot i això, en la majoria de les respostes hi apareixia alguna idea de la definició com ara "raonament lògic", "segueix unes premisses" o "serveix per a comprovar un resultat".

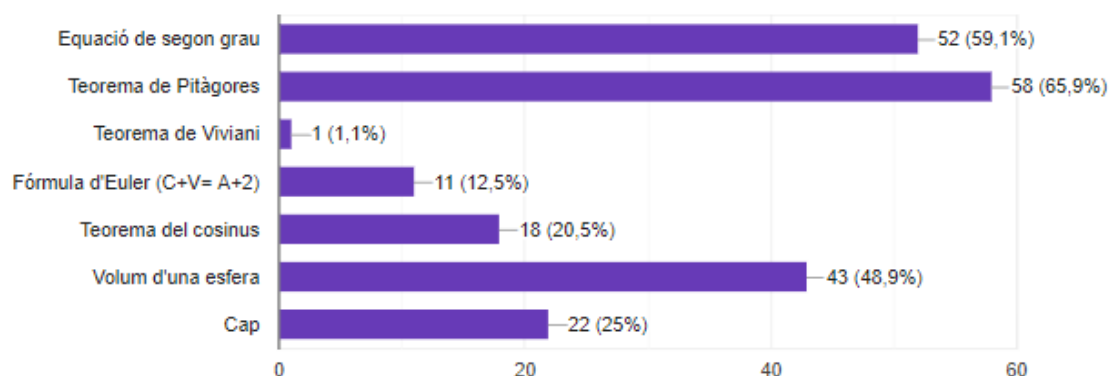
Amb aquestes dades vaig concloure que els enquestats (majoritàriament estudiants) tenen una lleugera idea de què són les demostracions matemàtiques tot i que no ho saben definir amb precisió.

A la següent pregunta vaig demanar si creien que era important saber fer demostracions matemàtiques:



Un 67.1% de les respostes van ser "sí" mentre que l'altre 32.9% va ser "no".

A continuació vaig proposar una sèrie de teoremes i fórmules que apareixen al llarg de l'ESO i 1r de batxillerat i vaig preguntar quins sabien demostrar:



El teorema de Pitàgores va ser el que sabia demostrar més gent, seguit de la fórmula de l'equació de 2n grau i la fórmula del volum d'una esfera.

En general, la majoria de persones que han contestat saben fer alguna demostració. Aquest resultat concorda amb el de la pregunta anterior ja que si les persones més o menys saben què són, potser els donaran més importància, n'aprendran a fer i milloraran la seva comprensió sobre aquests teoremes.

L'última pregunta era: "en cas que hagi marcat menys de tres caselles o l'opció *cap*, perquè creus que és així?"

perquè a mi em costa molt

N'he marcat tres, però les mates son bastant inútils de la manera en la que ens les ensenyen. Crec que haurien d'estar enfocades d'una manera més pràctica i enriquidora per tots els alumnes o després d'un cert nivell només les haurien de fer les persones que volen seguir estudiant temes centrats en les matemàtiques.

Perquè moltes vegades no aprens 100% un teorema o fórmula, simplement ho apliques perquè ho has de fer

No faig batxillerat

Perquè no ens ho han ensenyat, tot i que si es fes això crearia més interès i curiositat als nens de manera que ho saberien fer millor i alhora voldrien aprendre més coses com aquella.

Crec que simplement ens ensenyen com es fa servir, perquè llavors a l'examen puguis resoldre els exercicis (encara que no sàpigues perquè existeix el teorema ni com es troba). Com he dit abans, crec que aquest sistema només es basa en una nota. Pocs professors de matemàtiques expliquen com demostrar les fórmules.

Perquè a l'escola sempre ens han ensenyat a fer servir les fórmules i no a entendre el que estem fent.

Perquè les matemàtiques mai han sigut una cosa que hagi acabat d'entendre i a la mínima oblidó fórmules o coses per l'estil.

Perquè encara no els hem fet/treballat

En aquest apartat vaig rebre respostes molt diverses tot i que hi havia un seguit d'idees que es repetien bastant. Les dues més freqüents van ser:

- 1- Els professors no fan demostracions, només ensenyen la fórmula perquè és el que s'utilitzarà a l'examen i, com que la demostració no entra, no cal perdre el temps ensenyant-la tot i que potser fer-ho milloraria la comprensió dels alumnes.
- 2- No hi ha interès en saber fer les demostracions ja que no serveixen de res en el dia a dia.

Arran dels resultats obtinguts en aquesta última pregunta veiem clarament que hi ha persones que han marcat menys de 3 opcions o la casella "cap" perquè no troben utilitat a les demostracions. Per contra, hi ha un altre grup de persones que no saben o saben fer poques demostracions perquè el professor creu que no s'han de treballar. Aquesta decisió pot ser deguda a qüestions de temps i de temari o simplement a la situació de la classe ja que fer demostracions requereix de molta concentració i atenció i, en segons quins grups, ambdues escassegen. Si és degut al segon motiu, hi ha poca cosa a fer però, si el motiu és el primer, el docent s'hauria de replantejar la seva elecció ja que segurament ensenyar demostracions als alumnes els ajudaria a entendre millor el tema i els amenitzaria la classe.

He fet un recull d'algunes fórmules i teoremes que ja sabia demostrar i ho he completat amb resultats interessants de les publicacions d'Alsina, Nelsen i Gasull ([AlNe] i [GasA]).

N'he escollit de diferents nivells. Algunes senzilles perquè es puguin mostrar a partir de 2n d'ESO i d'altres més difícils pels estudiants de 4t o fins i tot batxillerat.

3.2- Demostracions

3.2.1- Una pregunta amb resposta sorprenent

Hi ha alguna parella de nombres irracionals que un elevat a l'altre doni un número racional?

Anem a demostrar-ho:

Prenem per exemple el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. A partir d'aquí tenim dos camins:

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és racional ja tindriem els dos números que busquem: en aquest cas serien els dos $\sqrt{2}$. Si no és racional, prendrem el número que teníem i l'elevarem a un altre irracional. En aquest cas seria $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Podem observar que $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ per tant, sí que hi ha almenys una parella de nombres irracionals que un elevat a l'altre dona un número racional.

3.2.2- Infinitos nombres primers

Demostrarem que hi ha infinits nombres primers fent servir la prova d'Euclides que es basa en usar la contradicció.

Suposem que els nombres primers són finits. Anomenarem el primer com a P_1 i l'últim com a P_k . Seguidament farem el producte de tots aquests números i hi sumarem 1. És a dir: $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k + 1$. El valor obtingut no serà divisible per cap nombre primer dels que havíem designat al principi ja que, tot i que sí que són divisors de $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$, no són divisors d'1. Per tant, hem obtingut un nou nombre primer ja que el resultat de $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k + 1$ només és divisible per ell mateix i per 1. Anteriorment hem suposat que els nombres primers són finits però, mitjançant aquesta prova, n'hem aconseguit de nous. Per tant, la nostra suposició és errònia i això demostra que els nombres primers són infinits.

3.2.3- El forat dels nombres primers

Acabem de demostrar que els nombres primers són infinits. També podem demostrar que en algun punt dels nombres naturals hi ha X nombres consecutius on cap d'ells és primer. El valor d' X pot ser qualsevol natural més gran o igual que 2. La demostració és relativament senzilla. Per fer-la, sumarem 1 a X i farem el factorial. En aquest producte hi sumarem K .

K seran els nombres naturals des de 2 fins a $X+1$ ambdós inclosos. El resultat que obtindrem serà divisible per K per tant no serà primer.

$$(X + 1)! + k$$

$$k = \{2, \dots, X + 1\}$$

Agafem per exemple $X=5$ $6!+k = 720+k$

$720+2= 722$ (divisible per 2)

$720+3 = 723$ (divisible per 3 ja que $7+2+3=12$ que és múltiple de 3)

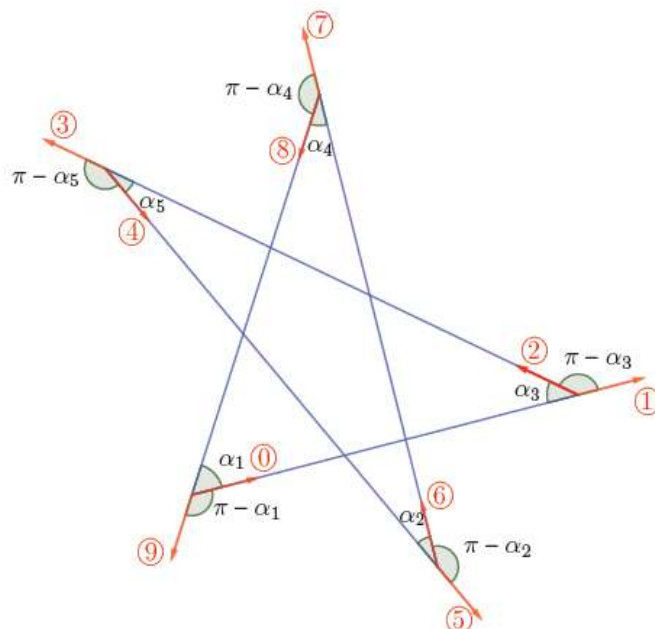
$720+4= 724$ (divisible per 4 perquè les 2 últimes xifres són múltiple de 4)

$720+5= 725$ (divisible per 5)

$720+6= 726$ (divisible per 6 ja que és divisible per 2 i per 3)

3.2.4- π és l'estrella

Demostrarem que la suma dels angles de qualsevol estrella de 5 puntes és igual a π .



Començarem imaginant un vector unitari a qualsevol dels vèrtex de l'estrella i paral·lel al costat (posició 0). Seguidament desplaçarem aquest vector fins al pròxim vèrtex (posició 1). Si mirem el dibuix, en aquesta posició l'angle que forma el vector amb el costat de l'estrella més α_3 és igual a 180° , que si ho passem a radians seria π rad. Per tant, l'angle que es forma entre el vector i el costat és de $\pi - \alpha_3$. El següent pas és girar el vector $\pi - \alpha_3$ radians fins que quedi a la posició 2. Seguirem repetint aquest procés fins que el vector torni a estar a la posició 0.

Si mirem l'angle girat pel vector al llarg de tot el "trajecte" veurem que ha fet dues voltes, que serien 4π radians. Per tant:

$$4\pi = (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5)$$

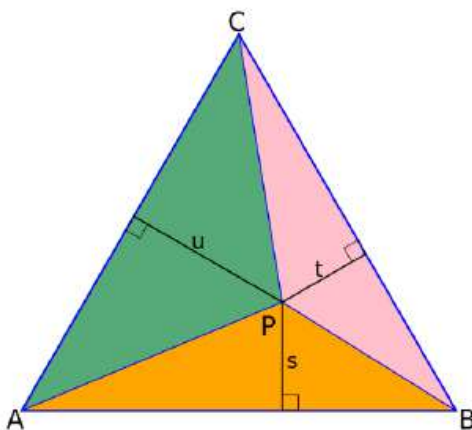
$$4\pi = 5\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

$$\pi = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

Que és el que volíem demostrar.

3.2.5- El descobriment de Viviani

Viviani va demostrar que quan tenim un triangle equilàter, la suma de les distàncies de qualsevol punt als 3 costats és sempre la mateixa i igual a l'altura del triangle.

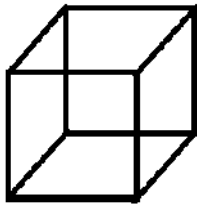


Com veiem en el dibuix, la suma de les àrees dels triangles que hem format a partir del punt és igual a l'àrea total del triangle. Com que sabem que l'àrea d'un triangle és base multiplicat per altura i dividit per 2 podem escriure-ho així: (a és la base, h l'altura total del triangle i s, t, u les altures dels triangles que s'han format)

$$\frac{ah}{2} = \frac{as}{2} + \frac{at}{2} + \frac{au}{2} \quad ah = as + at + au \quad h = s + t + u$$

3.2.6- La fórmula d'Euler: $c+v=a+2$

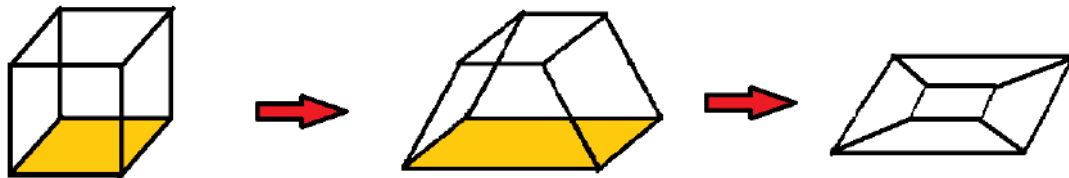
Euler va ser un dels matemàtics més productius de tots els temps. Si comptéssim les pàgines que va escriure durant la seva vida i ho dividíssim entre els dies que va viure, ens sortiria una mitjana de 4 pàgines diàries comptant que des del dia del seu naixement ja hagués començat a escriure. A més a més, els últims 10 anys de la seva vida va estar cec i, tot i això, va seguir publicant articles i fent descobriments. Una de les seves fórmules més importants diu que en qualsevol polígon o poliedre, la suma de les cares i els vèrtexs és igual a les arestes més 2. Anem a demostrar-ho posant com a exemple un cub, tot i que amb qualsevol poliedre el procediment seria el mateix:



El cub té $v=8$, $c=6$ i $a=12$.

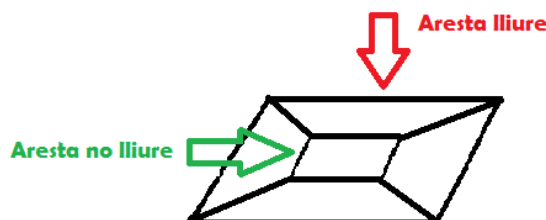
Per tant, es compleix $c+v=a+2$ ja que $8+6=12+2$

Ara imaginem que el cub és de goma i el podem deformar com vulguem. El que farem és estirar la cara inferior fins que ens quedi una figura plana.

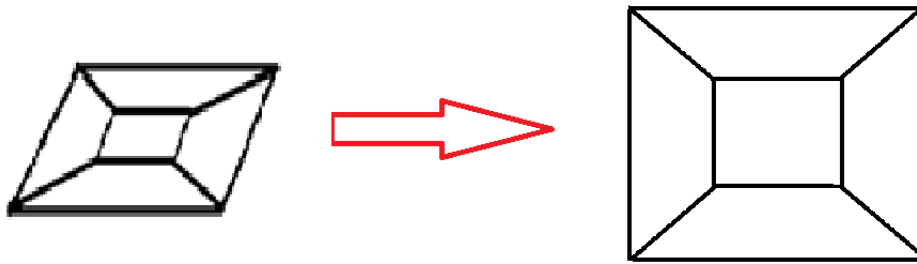


Un cop hem arribat a l'última figura, podem veure clarament que en passar d'una figura amb volum a una figura plana hem perdut una cara (senyalada amb taronja). Aquesta nova figura té $c=5$, $v=8$ i $a=12$. Per tant, la fórmula en aquesta figura canvia i seria $c+v=a+1$. Seguint aquest raonament, podem afirmar que demostrar la fórmula $c+v=a+2$ al cub és equivalent a demostrar $c+v=a+1$ a l'última figura.

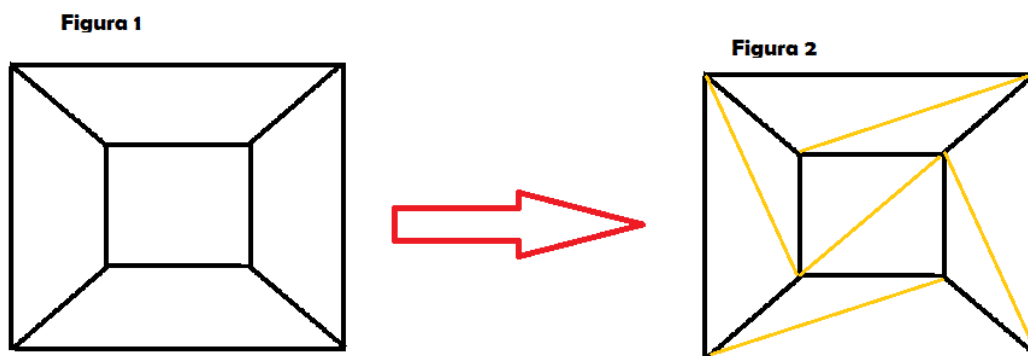
Abans de seguir amb la demostració, cal aclarir el concepte d'aresta lliure, ja que ens serà útil més tard. Una aresta lliure és aquella que només fa frontera amb una cara. Si fa frontera amb més d'una cara ja no és una aresta lliure.



Ara canviarem el punt de vista per a fer més fàcil la comprensió de la demostració. Passarem d'una vista frontal a una vista aèria.



Tot seguit dividim la figura 1 en triangles tal i com s'indica en el dibuix:



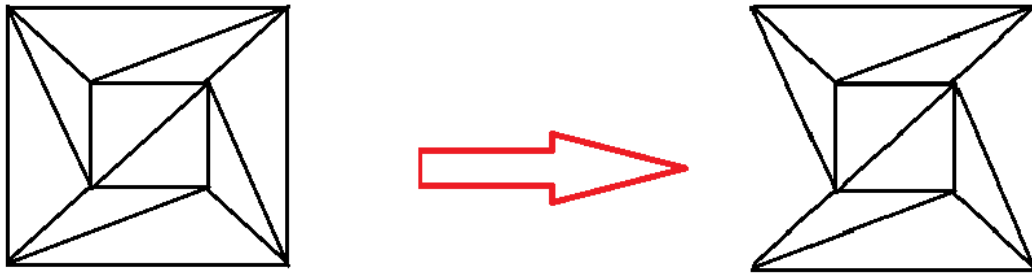
Per a aquesta nova figura farem servir una nova notació: Els costats de la figura 2 rebran la lletra c' , les arestes a' i els vèrtexs v' . El número de vèrtexs al passar de la figura 1 a la 2 és el mateix. Per tant, $v=v'$.

El nou número de cares és el doble que les inicials ja que cada cara l'hem dividit en 2. Per tant, $c'=2c$, que és el mateix que dir que $c=c'/2$

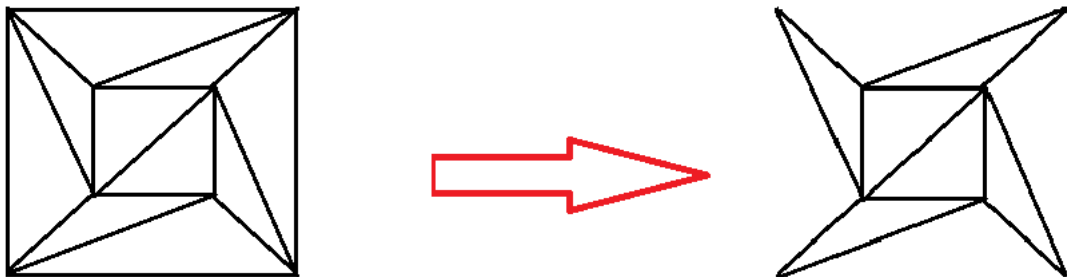
El nou número d'arestes serà el nombre d'arestes inicials més el número de cares ja que per a cada cara hem afegit una aresta. Per tant, $a'=a+c$, que és el mateix que dir que $a=a'-c$ i sabent que $c=c'/2$, $a=a'-c'/2$

Havent definit això, anem a escriure la fórmula d'Euler per a la figura 2. Per a la figura 1 és $c+v=a+1$ per tant, per a la figura 2 serà $c'/2+v'=a'-c'/2+1$. Si passem $-c'/2$ a l'altra banda, la fórmula queda així: $c'+v'=a'+1$. Novament, demostrar la fórmula a la figura 2, serà equivalent a demostrar-la a la figura 1 i al cub.

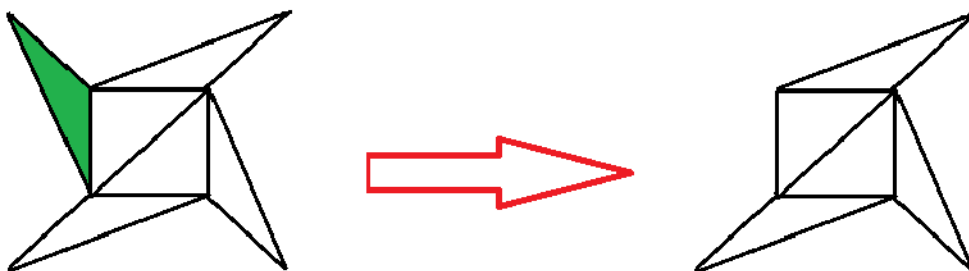
En el següent pas eliminarem una aresta lliure.



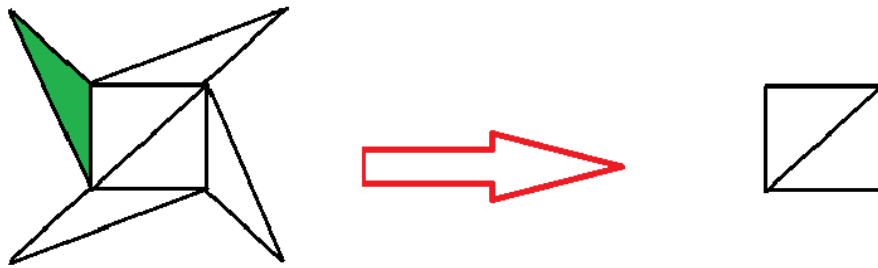
En eliminar aquesta aresta, hem perdut una cara. La fórmula seria així: $c'-1+v'=a'-1+1$. Com hem pogut veure, a ambdues parts de l'equació hi restem 1 per tant no es veu alterada. Seguint aquest raonament, podríem eliminar totes les arestes lliures i la fórmula seguiria igual. Després d'eliminar totes les arestes lliures, la figura quedaria així:



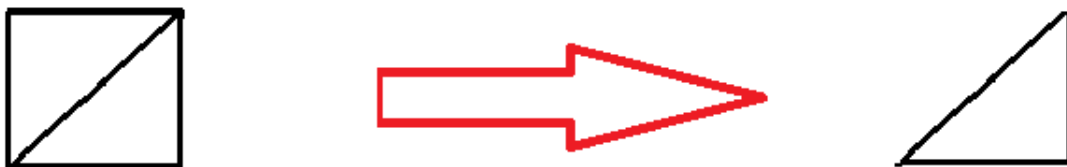
A continuació, el que farem serà eliminar la cara pintada de color verd.



Amb aquest pas perdrem una cara, dues arestes i un vèrtex. La fórmula quedaria $c-1+v-1=a-2+1$. Novament, hem restat la mateixa quantitat a ambdues bandes de la igualtat. Per tant, la fórmula queda igual. El que deduïm a partir d'aquí, és que podem eliminar totes les cares iguals a l'assenyalada amb color verd. Després de fer-ho, la figura quedaria de la següent manera:



Un cop obtenim aquest quadrat dividit en 2 triangles, podem repetir altre cop el pas anterior ja que novament la fórmula quedaria inalterada:



El que hem obtingut al final de tot aquest procés és un triangle. En aquesta figura, $c=1$, $v=3$ i $a=3$. Veure que $c+v=a+1$ és molt evident ja que $1+3=3+1$. Com que la fórmula es compleix en el triangle, també es compleix en tots els passos previs on la figura és plana (ja que hem vist que encara que suprimíssim cares i arestes, la fórmula quedava inalterada). Per tant, si la fórmula $c+v=a+1$ es compleix quan la figura és plana i la seva equivalent quan el cos té volum és $c+v=a+2$, la fórmula $c+v=a+2$ també es compleix sempre.

Aquesta fórmula ha estat molt útil per a demostrar altres teoremes com el de Pick, o per a demostrar que només hi ha 5 poliedres regulars, demostracions que veurem més endavant.

3.2.7- Els cinc poliedres regulars

Un poliedre és un cos geomètric les cares del qual són polígons. Alhora, els polígons són figures planes limitades per arestes. Si el polígon té tots els costats i angles iguals és regular. Quan totes les cares d'un poliedre són polígons regulars i a cada vèrtex hi ha el mateix nombre d'arestes, el poliedre també és regular.

Fa més de 2000 anys, els grecs van descobrir que només hi havia 5 poliedres regulars: el tetraedre, l'octaedre, el cub, el dodecaedre i l'icosaedre. El que no van saber fer va ser demostrar per què això és així. Molts anys més tard, i gràcies a la fórmula d'Euler que hem comprovat a l'apartat anterior, finalment es va poder corroborar que efectivament només hi poden haver cinc poliedres regulars.

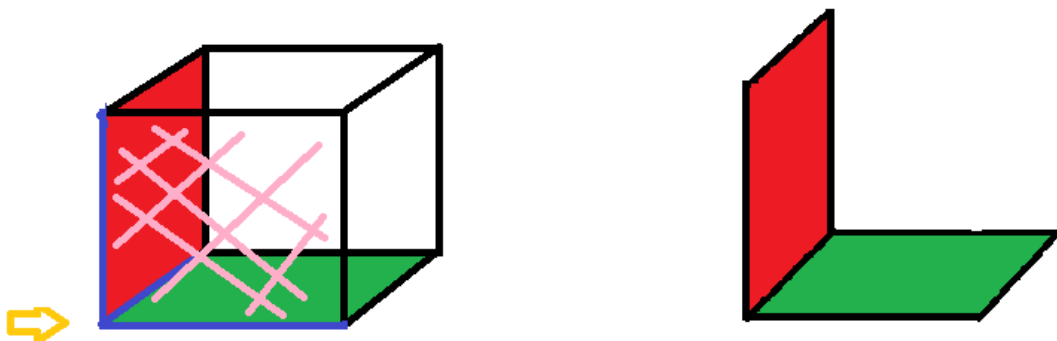
Abans de començar amb la demostració, definirem la notació que farem servir:

V = número de vèrtexs i arestes que té una cara del poliedre regular.

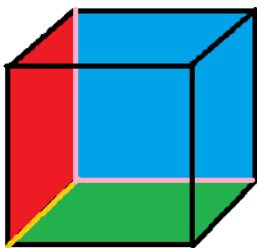
Com que les cares estan formades per polígons regulars, el número de vèrtexs serà el mateix que el d'arestes. Per exemple si la cara és un quadrat, $v=4$ i $a=4$. El número de vèrtexs i arestes mínimes que pot tenir una cara és 3. Amb 2 només es forma una recta i amb 1 és només un punt. Per tant, **$V \geq 3$** .

E = número de cares i arestes que es troben en un mateix vèrtex.

El número de cares que es troben en un mateix vèrtex sempre és igual al número d'arestes. En aquest cas, el número de cares que es troben al vèrtex marcat amb una fletxa taronja són 3 i les arestes també són 3. Per a tenir una figura amb volum, el mínim de cares que s'han de trobar en un vèrtex són 3 (si són 2 queda com a la segona figura). Per tant, **$E \geq 3$** .



Cada cara del poliedre té V vèrtexs i V arestes ja que V és el número de vèrtexs i arestes que té una cara. Per tant, si multipliquem el nombre de cares per V obtindrem totes les arestes del poliedre comptades dues vegades. Això que sembla una mica estrany, s'explica molt fàcilment amb un dibuix: imaginem que multipliquem el nombre de cares per V . El raonament que seguiríem per a la figura seria: "si tinc 6 cares i cada cara té 4 arestes, aleshores la figura té 24 arestes". Això seria erroni ja que si les comptem només n'hi ha 12. El que passa és que al fer $c \cdot V$, hi ha arestes que estaríem comptant en 2 cares. Per exemple, estaríem comptant 2 vegades l'aresta taronja (dins la cara vermella i la verda) quan en realitat només n'hi ha una. Passaria el mateix amb les arestes roses, les estaríem comptant en les cares vermella i blava i blava i verda. A més a més, si el poliedre té v vèrtexs i a cada vèrtex s'hi troben E arestes, multiplicant $v \cdot E$ obtindríem el doble del número total d'arestes de la figura. Novament, que comptem el doble d'arestes es justifica amb el raonament anterior. De tot això podem extreure les fórmules $c \cdot V = 2a$ i $v \cdot E = 2a$. Per tant, també podem dir que $c \cdot V = v \cdot E$.



Un cop explicada la notació, començarem la demostració:

Partirem de la fórmula d'Euler $c+v=a+2$, passarem la a restant i girarem de lloc v i c de manera que obtindrem $v+c-a=2$. Seguidament multiplicarem tot per $2E$. Obtenim $2vE+2cE-2aE=4E$. Utilitzant les fórmules que hem demostrat inicialment, canviem vE per cV i $2a$ per cV ja que són equivalents. Queda així: $2cV+2cE-cVE=4E$. De fet, des que hem multiplicat per $2E$, l'objectiu era aconseguir una igualtat a la qual en una de les bandes poguéssim extreure factor comú c . El següent pas, serà extreure factor comú c : $c(2V+2E-VE)=4E$.

Sabem que $4E$ i c són positius ja que c és el nombre de cares i E és el número de cares i arestes que es troben en un vèrtex i no tindria sentit geomètric que fossin negatius. Per tant, $2V+2E-VE$ també ha de ser positiu (ja que si fos negatiu el resultat de la multiplicació seria negatiu). Això ens porta a afirmar que $2V+2E-VE > 0$. Si ho canviem tot de signe obtenim $VE-2V-2E < 0$.

En aquesta desigualtat hi sumarem 4. $VE-2V-2E+4 < 4$. Gràcies a haver sumat 4, podem posar la desigualtat en forma de producte: $(E-2)(V-2) < 4$. A l'inici de tot hem vist que V i E només poden prendre valors més grans o iguals que 3. En conseqüència, ni $(E-2)$ ni $(V-2)$ seran negatius. Per tant, les úniques combinacions que fan possible $(E-2)(V-2) < 4$ serien:

valor d'(E-2)	valor de (V-2)
1	1
1	2
1	3
2	1
3	1

Per tant, els valors d'E i V seran:

valor d'(E-2)	valor de (V-2)	E	V
1	1	3	3
1	2	3	4
1	3	3	5
2	1	4	3
3	1	5	3

Un cop sabem els valors que poden prendre E i V , podem buscar maneres de deduir el nombre de cares, vèrtexs i arestes. Primerament trobarem una fórmula per a trobar les cares:

Agafem la igualtat $c(2V+2E-VE)=4E$ que hem comprovat anteriorment. D'aquí aïllem c :

$c = \frac{4E}{2V+2E-VE}$ i com que sabem que $(V-2)(E-2) = VE-2V-2E+4$, passant el 4 restant i canviant-ho tot de signe, podem reescriure la fórmula de la següent manera:

$$c = \frac{4E}{4-(V-2)(E-2)}$$

Ara recuperarem la fórmula $c \cdot V = 2a$ que hem vist al principi i aïllem a : $a = \frac{c \cdot V}{2}$. Com que anteriorment hem trobat el valor de c , podem deduir a . $a = \frac{4E}{4-(V-2)(E-2)} \cdot \frac{V}{2}$;

$$a = \frac{2EV}{4-(V-2)(E-2)}$$

Sabent el valor d' a , podem trobar el valor de v amb la fórmula $v \cdot E = 2a$ ja que si aïllem,
 $v = \frac{2a}{E}$.

Anem a fer-ho: $v = \frac{2EV}{4-(V-2)(E-2)} \cdot \frac{2}{E}$; $v = \frac{4V}{4-(V-2)(E-2)}$

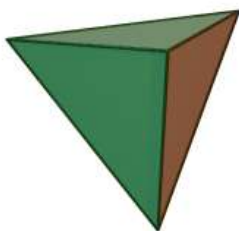
Ara ja tenim totes les dades per a escriure totes les possibles combinacions:

V	E	c	v	a	nom
3	3	4	4	6	tetraedre
3	4	5	6	12	octaedre
3	5	20	12	30	icosaedre
4	5	6	8	12	cub
5	3	12	20	30	dodecaedre

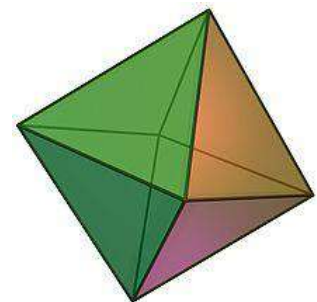
Com hem dit al principi, V és el nombre vèrtexs i arestes que es troben en una mateixa cara. Per tant, si la cara té 3 arestes a la mateixa cara, aquesta és un triangle; si en té 4 és un quadrat i si en té 5 és un pentàgon.

A partir de tots aquests càlculs, hem demostrat que només hi ha els 5 següents poliedres regulars i hem trobat el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cadascun. (fotos viquipèdia)

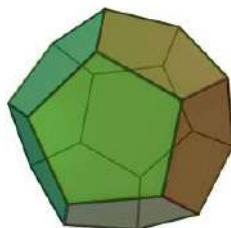
Tetraedre



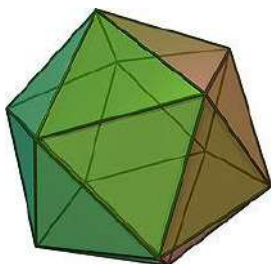
Octaedre



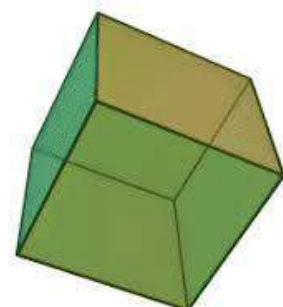
Dodecaedre



Icosaedre

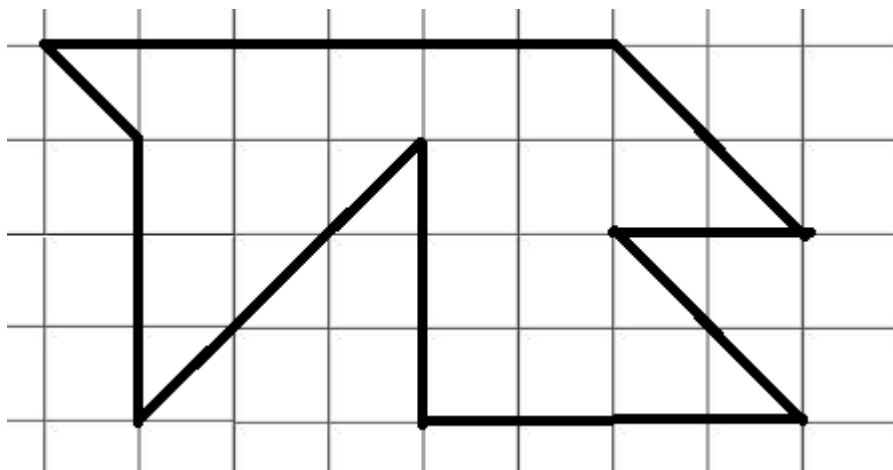


Cub



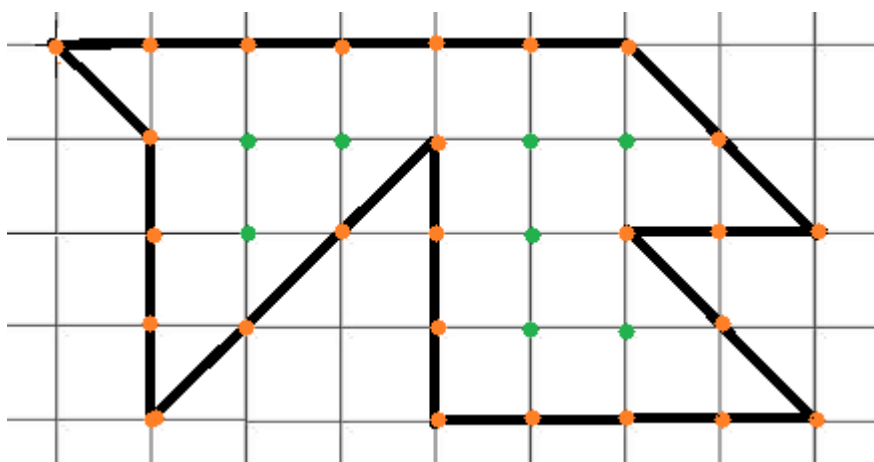
3.2.8- La fórmula de Pick

Imaginem que tenim un dibuix en una quadrícula.



Aquest dibuix està format només per ratlles rectes i no té forats dins. És possible trobar-ne l'àrea només comptant punts? La resposta és sí.

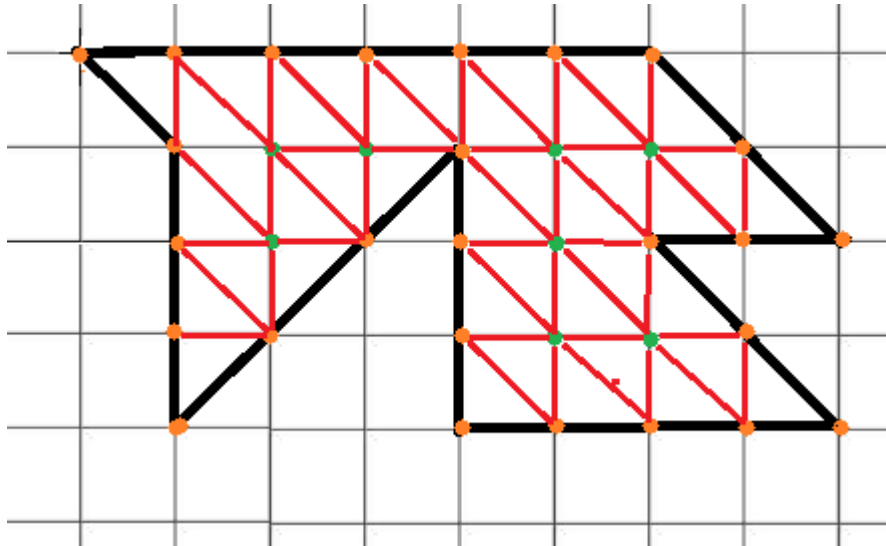
L'àrea d'aquest dibuix es calcula fàcilment utilitzant la fórmula de Pick que és $A = \frac{F}{2} + I - 1$ on F és el número de punts a la frontera del dibuix (taronja) i I és el número de punts a l'interior del dibuix (verd). En aquest cas $F=26$ i $I=8$. En aquest cas, l'àrea seria $\frac{26}{2} + 8 - 1 = 20$ quadrats



Com he dit abans, la fórmula funciona en tots els casos excepte quan hi ha buits dins la figura o aquesta té corbes.

Demostració:

Primer de tot dividirem la figura en triangles de manera que cada triangle tingui cada vèrtex en un punt de la figura. Els triangles que tenen un vèrtex a cada punt s'anomenen triangles fonamentals i tots tenen àrea $\frac{1}{2}$. Sabem que tenen àrea $\frac{1}{2}$ perquè l'àrea d'un triangle és $base \cdot altura/2$. Aquests triangles tenen base 1 i altura 1 (ja que prenem el quadrat com a unitat). Per tant, l'àrea de cadascun d'aquests triangles és $\frac{1}{2}$.



Abans de seguir, definirem la notació que farem servir:

C = nombre de triangles fonamentals que tingui la figura.

Cada triangle té àrea $\frac{1}{2}$. Per tant, l'àrea total serà el número de triangles per $1/2$.

$$a = \frac{1}{2} \cdot C$$

F = Punts a la frontera de la figura

I = Punts a l'interior de la figura

A_i : Número d'arestes internes que estan en contacte amb 2 triangles.

A_f : Número d'arestes que estan només en 1 triangle. Coincideix amb el número de punts a la frontera de la figura ja que si les arestes només es troben en 1 triangle vol dir que són les arestes que conformen la frontera i a la frontera el número de punts és el mateix que d'arestes. Per tant $A_f = F$

A = Número total d'arestes. El número d'arestes totals serà el número d'arestes internes més el d'exteriors. $A = A_i + A_f$

Comencem la demostració:

El primer que farem serà pensar quantes arestes té tota la figura. Si cada triangle té 3 arestes i tenim C triangles el número total d'arestes serà $3C$. Alhora, $3C$ és igual a sumar dues vegades les arestes interiors (dues vegades ja que cada aresta interior està a 2 triangles al mateix temps) i les arestes exteriors. Per tant, $3C = 2A_i + A_f$. El següent pas que farem serà passar dues de les $3C$ a l'altra banda restant. $C = 2A_i - 2C + A_f$. Aquí podem extreure factor comú un 2: $C = 2(A_i - C) + A_f$. Ara recuperarem la fórmula $A = A_i + A_f$ que hem explicat anteriorment i aïllarem A_i : $A_i = A - A_f$. Seguidament substituïrem a : $C = 2(A_i - C) + A_f$ de manera que ens queda $C = 2(A - A_f) - 2C + A_f = 2A - 2A_f - 2C + A_f = 2A - 2C - A_f$. Aquí treurem 2 factor comú: $C = 2(A - C) - A_f$.

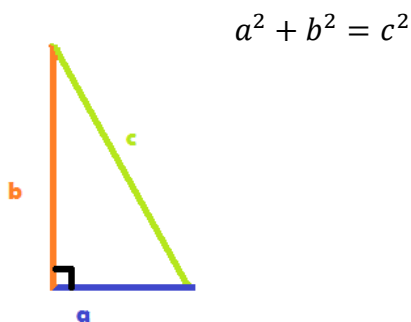
Pel següent pas utilitzarem la fórmula d'Euler per a figures planes ($C+V=A+1$) que ja hem demostrat en un altre apartat del treball. L'aïllarem d'aquesta manera: $A - C = V - 1$. Ara que sabem això, ho podem aplicar a la igualtat $C = 2(A - C) - A_f$ i transformar-la en $C = 2(V - 1) - F$. Sabem també que V , el número de vèrtexs de la figura, serà igual a la suma de punts a la frontera i de punts a l'interior ja que cada punt és un vèrtex d'un triangle fonamental. Per tant $V = F + I$. A continuació, ho substituïrem a l'equació de manera que ens quedarà $C = 2(F + I - 1) - F$. Ara operarem amb això: $C = 2F + 2I - 2 - F = F + 2I - 2$

Al principi hem vist que l'àrea del dibuix era $\frac{1}{2} \cdot C$. Ara ja sabem C . Per tant, l'àrea de qualsevol dibuix serà $A = \frac{F+2I-2}{2}$; $A = \frac{F}{2} + I - 1$ que és el que volíem demostrar.

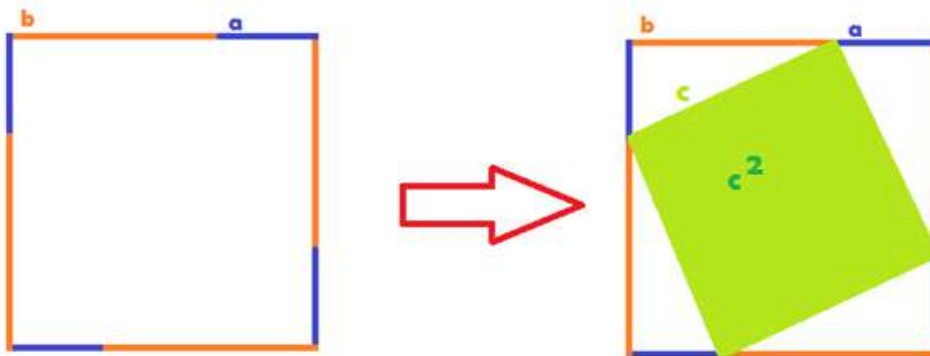
3.2.9- Teorema de Pitàgores

El teorema de Pitàgores és un dels primers teoremes que s'ensenyen a l'escola ja que és un dels més utilitzats. Fa més de 2500 anys que es coneix i té diverses demostracions. En aquest cas la farem a través d'un dibuix.

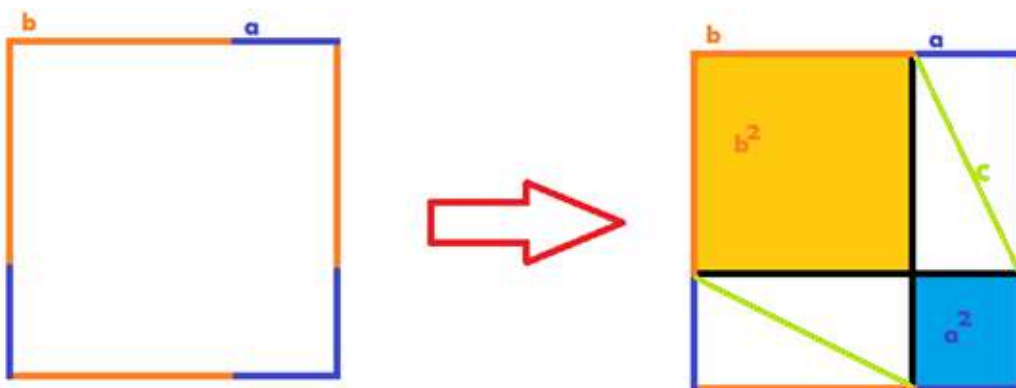
El que volem demostrar és que en qualsevol triangle rectangle es compleix que la suma dels catets elevats al quadrat és igual a la hipotenusa al quadrat.



El primer pas per a fer la demostració serà dibuixar un quadrat de costat $a+b$. En aquest quadrat tenim, de manera intercalada, a i b . Per tant, podem acabar de dibuixar els triangles rectangles. Després de fer-ho veiem que al mig del quadrat se n'ha format un altre d'àrea c^2 .



A continuació dibuixarem un altre quadrat de costat $a+b$ però a i b no estaran intercalats sinó que estarien a davant d' a i b davant b . En aquest quadrat farem una recta que uneixi a amb a i b amb b . Quan hem fet això, veiem que es formen dos quadrats i dos rectangles. Els costats d'aquest triangle mesuren a i b . Per tant, podem acabar de dibuixar el triangle. Els dos quadrats que es formen tenen àrea b^2 i a^2 .

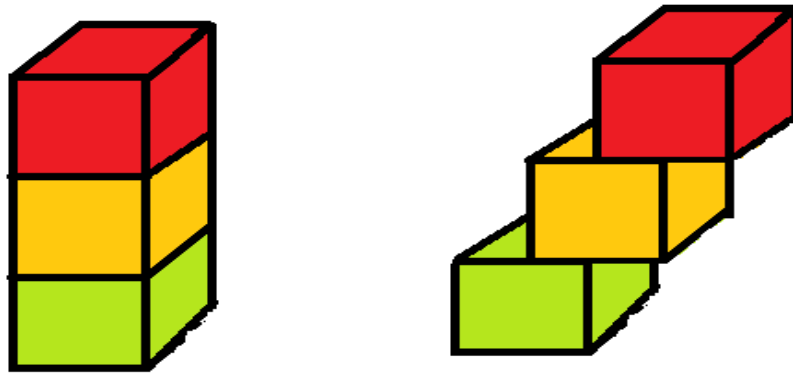


En els dos casos, l'àrea del quadrat inicial és la mateixa ja que en tots dos mesura $a+b$. També veiem que apareixen 4 triangles que són els mateixos en les dues figures. Per tant, forçosament l'àrea del quadrat verd ha de ser igual a la del quadrat taronja més la del quadrat blau. Sabem que l'àrea del quadrat verd és c^2 , la del taronja b^2 i la del blau a^2 . Per tant, podem afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$ que és el que volíem demostrar.

3.2.10- Volum d'una esfera

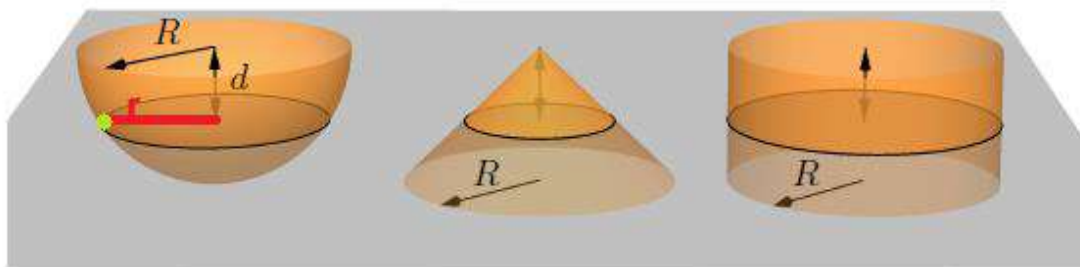
La fórmula que ens permet calcular el volum d'una esfera es coneix des de l'antiguitat. Aquesta demostració que presentaré a continuació és la que va fer el conegut Arquímedes. Per fer-la, es va basar en el que actualment coneixem com el principi de Cavallieri, tot i que aquest principi no es va demostrar fins molts segles més tard, després de la seva mort.

El principi de Cavallieri diu que si en tallar dues figures amb un pla per qualsevol lloc, les dues seccions tenen la mateixa àrea, forçosament les figures tenen el mateix volum. En el dibuix que ve a continuació podem veure dues figures formades per 3 cubs. Tot i que a la segona figura estan desplaçats, és evident que si talléssim per qualsevol punt amb un pla, les àrees de les seccions serien iguals. Per tant, ambdues figures tenen la mateixa àrea i volum.



Un cop explicat això, podem començar amb la demostració:

Suposem que tenim mitja esfera de radi R , un con de radi R i altura també R i un cilindre amb radi R i altura R .



Ara imaginem que tallem cadascuna de les figures a una distància d des del punt més alt. Obtenim 3 seccions circulars noves que anomenarem "noves bases".

Fixem-nos en la semiesfera: si desplaçem el radi R des de la seva posició actual fins que la fletxa arribi al punt verd es forma un triangle rectangle de catets d i r i hipotenusa R . A partir d'aquest nou triangle podem aplicar el teorema de Pitàgores i calcular el radi de la nova base (r). Sabem que $R^2 = r^2 + d^2$ per tant $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Un cop sabem això, podem calcular l'àrea de la nova base que serà $\pi(R^2 - d^2)$.

Ara mirem el con. Com que abans de tallar-lo la seva altura era igual al seu radi, després de tallar-lo segueix mantenint les proporcions. Ara té radi d i altura també d . L'àrea de la seva nova base serà $\pi \cdot d^2$.

Finalment, fixem-nos en el cilindre. De la mateixa manera que el con, abans de tallar-lo, el radi era exactament igual a l'altura. Per tant, després de tallar-lo les proporcions no han canviat. Ara té radi R i altura d . Com que sabem que $R=d$ podem dir que tant el seu radi com la seva alçada valen R . En conseqüència, l'àrea de la nova base serà $\pi \cdot R^2$.

Si ens fixem en les tres àrees obtingudes, podrem veure que la suma de les àrees de les noves bases de la semiesfera i el con és igual a la nova base del cilindre $\pi(R^2 - d^2) + \pi \cdot d^2 = \pi \cdot R^2$; si operem el parèntesi:

$$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot d^2 + \pi \cdot d^2 = \pi \cdot R^2 \quad \text{i finalment} \quad \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R^2$$

Un cop demostrat això, anem a recordar el principi de Cavalieri que s'ha explicat a l'inici. Si dues figures tenen la mateixa àrea, forçosament tenen el mateix volum. D'això en podem extreure que $\frac{\text{Volum esfera}}{2} + \text{Volum con} = \text{Volum cilindre}$

Sabem l'alçada i el radi del con i del cilindre. Per tant, en podem calcular el volum:

Volum con (alçada d i radi d): $V = \frac{\pi d^3}{3}$. Com que sabem que $d=r$ podem reescriure la fórmula d'aquesta manera: $V = \frac{\pi R^3}{3}$.

Volum cilindre (alçada i radi R): $V = \pi R^3$

Un cop sabem això, podem completar la igualtat que hem deduït anteriorment i aïllar el volum de l'esfera.

$$\frac{\text{Volum esfera}}{2} + \frac{\pi R^3}{3} = \pi R^3$$

Si realitzem els càlculs necessaris:

$$\frac{\text{Volum esfera}}{2} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3}; \quad \frac{\text{Volum esfera}}{2} = \frac{3\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{3};$$

$$\frac{\text{Volum esfera}}{2} = \frac{2\pi R^3}{3}; \quad \text{Volum esfera} = 2 \left(\frac{2\pi R^3}{3} \right);$$

I finalment obtenim la fórmula

$$\text{Volum esfera} = \frac{4(\pi R^3)}{3}$$

4- El sistema educatiu

4.1- Introducció: L'opinió de la gent

Aquest segon bloc neix d'una sèrie de situacions que he anat veient durant el meu pas per l'educació però sobretot durant els cursos de 3r, 4t d'ESO i 1r de batxillerat. Durant aquests tres cursos he compartit aula amb moltes persones, totes elles amb habilitats i interessos diferents, però amb una preocupació comuna: si el que està explicant el professor sortirà a examen. Aquesta pregunta tan freqüent pot desencadenar dues situacions segons la resposta del professor. Si la resposta és "no" llavors la classe es relaxa i ja no escolta el que s'està explicant. Per contra, si la resposta és "sí" la gent sol posar-hi una mica més d'atenció i afegeix el tema a la llista de coses per a estudiar.

Un cop els professors han acabat d'explicar el tema, venen els famosos exàmens i amb ells el nerviosisme i l'estrès que provoquen a un gran nombre d'alumnes. Alguns són previsors, saben que hi ha moltes assignatures i el temari és extens i, per tant, han de començar a estudiar dies o fins i tot setmanes abans. Altres esperen a l'últim dia abans de l'examen i intenten estudiar-ho tot en una tarda. Normalment en el segon tipus d'estudiants el nivell d'estrès és més elevat, tant que a vegades fins i tot pateixen insomni. Sigui com sigui, en ambdós tipus d'estudiants novament apareixen unes preguntes comunes: "Per què estic estudiant això si no m'interessa i/o m'estressa?" i "Això per a què serveix a part de per aprovar l'examen?".

Exposades aquestes dues situacions, vaig pensar que s'observaven carències en el sistema educatiu i que hi havia algunes coses que s'haurien de canviar per a motivar més els alumnes o per intentar canviar les situacions que he explicat abans. Com he dit, això es va quedar en un simple pensament i vaig seguir fent el meu treball sobre demostracions matemàtiques. No va ser fins tres setmanes més tard, quan ja estava a punt d'acabar les demostracions, que vaig veure que, en realitat, el que feia interessant una demostració matemàtica no era arribar del resultat A al resultat B fent servir una sèrie de càlculs o arguments lògics, sinó que era el fet de ser capaç d'entendre el perquè de cada pas i què aconseguíem amb cada nova operació. En aquell moment vaig veure que era molt més important entendre com i per què fem les coses que no pas fer-les de manera mecànica i sense saber per què les fem.

En aquell instant van tornar al meu cap els pensaments sobre el sistema educatiu que havia tingut unes setmanes abans i vaig considerar que dins el meu treball de recerca havia d'haver-hi una part que parlés sobre això, sobre la importància d'entendre i sobre perquè el sistema educatiu actual té algunes coses que s'haurien d'arreglar per evitar preguntes com les que he exposat anteriorment.

De tot aquest raonament vaig extreure'n una sèrie de preguntes i vaig formular algunes hipòtesis:

1- Per què els alumnes només es preocupen per si X contingut entrarà a examen?

Potser el sistema premia més recordar algunes coses concretes que no pas entendre el conjunt del tema.

2- Per què els alumnes no tenen interès en allò que estudien?

Potser estan obligats a fer aquella matèria encara que no els agradi o potser no tenen més opcions per a triar.

3- Per què l'estat més freqüent a l'institut és l'estrès?

Potser ningú els ha ensenyat a gestionar les seves emocions correctament.

4- Per què els alumnes es pregunten per a què serveix el que estudien?

Potser mentre s'explicava el contingut no se li ha donat prou sentit.

Aleshores vaig veure que totes aquestes preguntes es podien englobar en una:

Per què falla el sistema educatiu i com podem millorar-lo?

Per a poder contestar això necessitava dades, i per obtenir aquestes dades vaig difondre una enquesta els resultats de la qual veurem en el pròxim apartat.

4.2- Les enquestes

4.2.1- Introducció

Després d'enviar l'enquesta a tots els alumnes i professors del meu institut, a alumnes d'altres centres (també d'instituts de fora de Banyoles) i a persones que actualment no estan dins el món de l'educació, vaig rebre un total de 87 respostes. A més a més de fer les enquestes, vaig contactar amb professors d'instituts i especialitats diferents per a veure més punts de vista. Tot el que explicaré en els següents apartats es basa en llibres, vídeos de Youtube (TED talks, conferències d'experts, estudiants que han donat la seva opinió, etc.), entrevistes (destaco la que li vaig fer a Eduardo Sáenz de Cabezón, doctor, professor i divulgador de matemàtiques), l'experiència dels meus pares (el meu pare és doctor en història medieval, ha publicat diversos articles i ha treballat de professor de matemàtiques i música i la meua mare és professora de primària i ha fet classes de biologia a diversos instituts), la meua pròpia experiència i l'experiència i opinió de les persones que han contestat les enquestes. Com podeu observar, la gran majoria de les fonts d'informació (tot i ser de fonts fiables com ara llibres escrits per científics o TED talks) són subjectives perquè al cap i a la fi, l'objectiu d'aquesta part del treball no és fer un experiment en un laboratori (que seria el típic model de recerca científica) sinó que és intentar entendre per què la gent té l'opinió que té sobre el sistema educatiu (a la qual cosa considero més aviat recerca social i/o filosòfica).

Es podria pensar que les fonts d'informació són massa subjectives i que, per tant, no són de fiar, que aquest treball és un simple recull d'opinions de gent sense formació especialitzada en l'àmbit i reflexions del propi autor i que per això no té cap mena de rigor ni validesa.

Enfront d'això (que segurament algú de vostès haurà pensat) voldria puntualitzar que el sistema educatiu no és objectiu. Qui decideix el que s'ensenya i en quant temps es fa és el govern i, com vostès sabran, cada partit polític té una ideologia diferent. Això repercuteix a l'hora de fer les lleis d'educació i, lògicament, cada partit fa les lleis segons les seves conveniències i conviccions. A més a més, també cal tenir en compte que cada professor té la seva manera d'ensenyar fet que afegeix encara més subjectivitat al tema.

Un cop dit això, els convido a seguir llegint, a estudiar amb mi les dades de les enquestes i a veure per vostès mateixos com les opinions de persones de diverses edats i de llocs geogràficament allunyats coincideixen. I és que moltes vegades no fa falta un experiment en un laboratori, ni un gran estudi de la universitat X, ni tan sols un article del conegut divulgador científic Daniel Closa (per exemple al diari "Ara") perquè el gran col·lectiu de persones que formen la societat s'adoni que quelcom falla.

4.2.2- Resultats de les enquestes

Les tres primeres preguntes eren dades de la persona que contesta: sexe, rol dins el sistema educatiu (si és que en formaven part) i últim curs que havien finalitzat.

De les 87 enquestes que vaig rebre resposta, 56 (64.4%) van ser contestades per noies i 31 (35.6%) per nois.

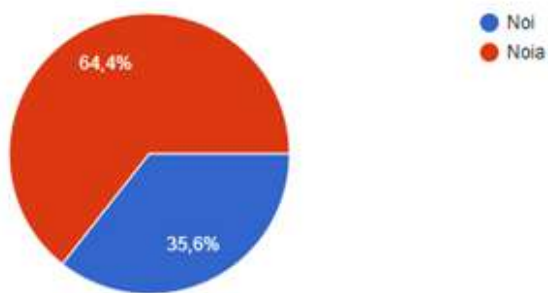


Figura 1: Percentatge de respostes segons sexe

De les 87 respostes, 84 van ser contestades per alumnes i les 3 restants, un professor i dues persones que no eren ni pares, ni alumnes, ni professors. Tot i que vaig fer arribar les enquestes a alguns pares, no van contestar.

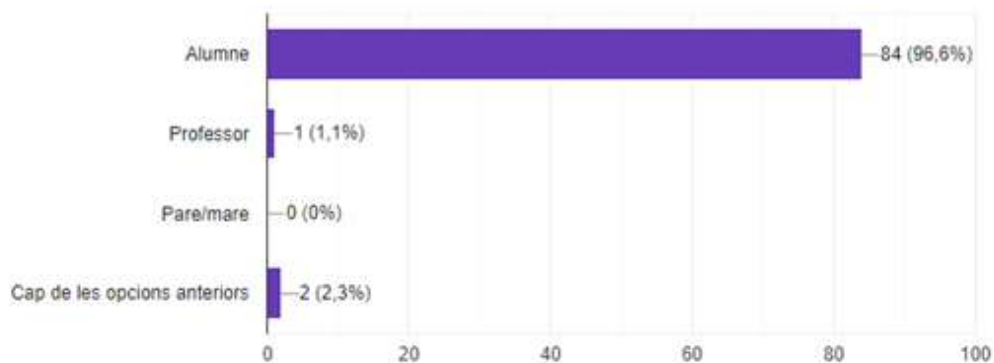


Figura 2: Ocupació de la mostra

De les 84 enquestes omplertes per estudiants, els que van tenir més participació van ser els que aquest any havien acabat 1r de batxillerat, seguits pels alumnes de 4t d'ESO, 2n i 3r d'ESO i 1r d'ESO i 2n de batxillerat.

En cas que siguis alumne, quin curs has acabat?

82 respostes

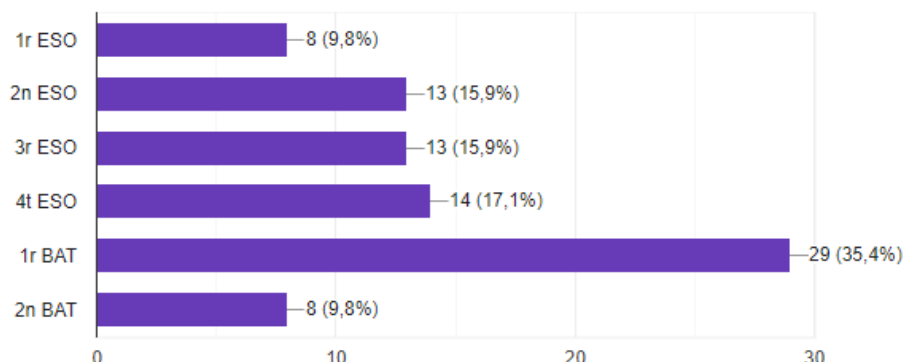


Figura 3: Últim curs finalitzat per l'enquestat

Nota: Aquesta pregunta no era indispensable respondre-la per a poder enviar el formulari ja que l'enquesta també estava destinada a persones que no estaven estudiant. És per això que tot i saber que 84 alumnes van contestar l'enquesta, en aquesta pregunta només hi ha 82 respostes.

L'enquesta constava de dues parts, la primera centrada sobretot en el sistema educatiu i la segona sobre demostracions matemàtiques. Els resultats de la segona part els he exposat en el primer bloc del treball i per tant a continuació ens centrarem en les preguntes sobre l'educació.

A la primera pregunta demanava si els pares els havien incentivat a aprendre coses des de petits. Amb aquesta pregunta el que volia saber era saber si els alumnes tenien pares implicats en la seva educació. La resposta va ser un contundent "sí" amb un 94.3% de les respostes.

Primera part: El meu pas pel sistema educatiu

Des de petit els teus pares t'han incentivat a aprendre coses?

87 respostes

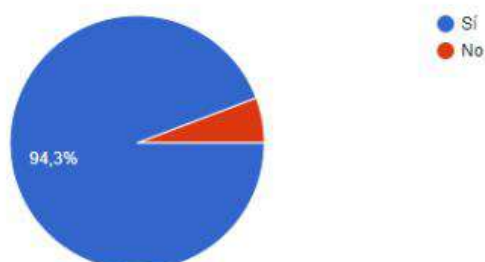


Figura 4: Participació dels pares en l'educació

La següent pregunta era si consideraven que l'ajuda dels seus pares havia contribuït en el seu desenvolupament acadèmic actual i les seves ganes per a aprendre. La resposta majoritària (82.6%) va ser "sí" i l'opció "no" va tenir el 14.9% dels vots. Va haver-hi un 2.5% que va matisar la seva resposta. Entre ells hi havia una resposta dient que sí, però de manera indirecta, una altra que sí però només fins a certa edat i una última que estava indecisa.

Creus que el teu paper ha afavorit al teu rendiment acadèmic?

87 respostes



Figura 5: Relació que estableix l'alumne entre la participació dels pares i els seus resultats acadèmics.

La quarta pregunta era "T'agrada com està muntat el sistema educatiu?". Els resultats parlen per si sols.

T'agrada com està muntat el sistema educatiu?

87 respostes

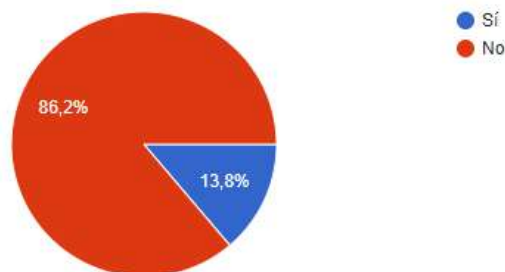


Figura 6: Opinió dels alumnes sobre si els agrada el sistema educatiu actual.

Quedar-se amb la informació que a un 86.2% dels enquestats no els agrada el sistema educatiu i que a un 13.8% sí és poc precís. El que és veritablement important és saber la raó d'aquestes respostes de manera que vaig demanar una justificació.

Vaig rebre respostes de tot tipus, des de simples “perquè sí” fins a respostes veritablement argumentades.

Tanmateix, tot i la gran varietat de respostes dins les negatives hi havia unes opinions que es repetien. Les exposaré de més a menys freqüent:

- 1- La memorització és l’habilitat més valorada en aquest sistema.
- 2- El sistema està poc adaptat als interessos, habilitats i capacitats dels alumnes.
- 3- Molta formació teòrica però poca en afers de la vida quotidiana.
- 4- La manera d’ensenyar està antiquada, s’ensenyava com fa 150 anys i no es formen a persones sinó que s’entrenen robots.
- 5- Els professors no tenen ganes d’ensenyar, ho fan sense passió.
- 6- L’educació actual respon a interessos polítics i està muntada perquè el poble no tingui esperit crític.

Quant a les opinions favorables sobre com està muntat actualment el sistema educatiu, les respostes eren sobretot:

- 1- Està bé perquè aprens una mica de tot.
- 2- Penso que està bé, però encara es pot millorar.

A la cinquena pregunta, vaig donar 3 opcions als enquestats per a saber si tot el que escrivien a l’examen ho entenien, si ho escrivien encara que no ho entenguessin (simplement repetien el que havien memoritzat) o si només escrivien a l’examen allò que realment entenien encara que potser no aprovessin. Aquests van ser els resultats:

Quina de les 3 opcions fas servir?

87 respostes



Figura 7: Estratègies que fan servir els alumnes per a fer els exàmens

Sorprenentment, el percentatge de persones que aprova sense acabar d'entendre el que fa només és un 4.6% més petit que el percentatge d'alumnes que aproven entenent completament el que estan fent. Llavors hi ha un 19.5% d'alumnes que opten per posar només el que realment saben i entenen.

En la següent pregunta vaig proposar una sèrie d'habilitats que es treballen o s'haurien de treballar a l'escola i vaig demanar que en triessin 3. Els resultats van ser aquests:

Quines d'aquestes opcions creus que treballles més a l'escola? Tria'n com a mínim 3

87 respostes

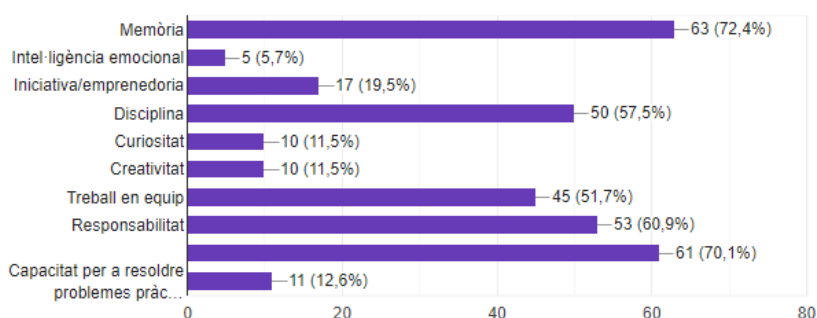


Figura 8: Habilitats més treballades a l'escola

Novament, la memòria ha estat l'opció més triada seguida de la capacitat per a resoldre problemes teòrics (no es veu a la fotografia perquè no hi caben les lletres), en tercer lloc la responsabilitat i en les pròximes posicions disciplina, treball en equip, iniciativa/emprenedoria, capacitat per a resoldre problemes pràctics i en els tres últims llocs curiositat, creativitat i intel·ligència emocional.

La setena pregunta era “quines emocions et provoquen la majoria de les classes? (sigui quina sigui l’assignatura)”. Per a respondre-la vaig donar dues opcions. A la primera els enquestats podien escriure lliurement i a la segona jo havia donat una sèrie d’opcions que eren: “interès i/o curiositat”, “avorriment i/o apatia” i “no trobo sentit al que estic escoltant”. En ambdues opcions, els sentiments més repetits eren avorriment i falta de sentit del contingut, seguits per indiferència, desinterès, angoixa i finalment satisfacció i curiositat.

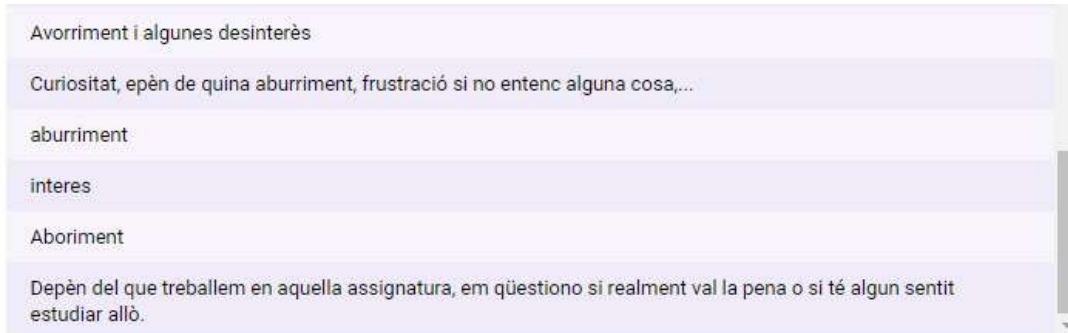


Figura 9: Emocions més freqüents a classe

La següent pregunta també estava encarada dins les emocions i aquest cop es centrava en les emocions que l’institut provoca en els alumnes.

Quines d'aquestes emocions has experimentat gràcies/per culpa de l'institut?



87 respostes

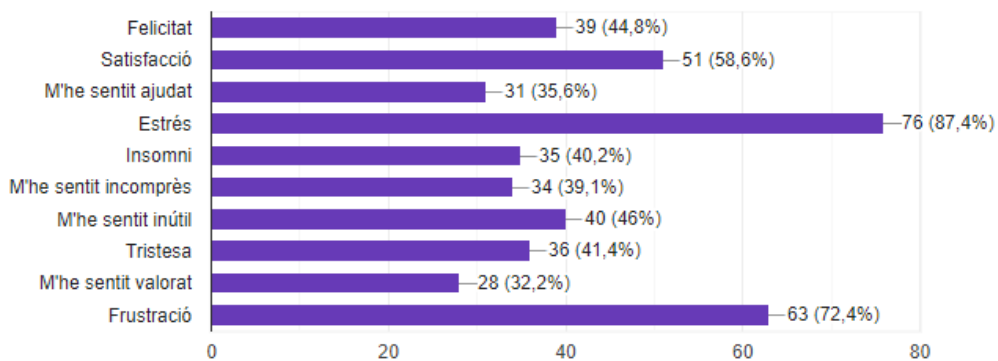


Figura 10: Emocions experimentades pels alumnes durant el pas per l’institut

En els resultats podem veure que hi ha tres emocions/estats que sobresurten per sobre la resta. Aquestes són: “estrès”, “frustració” i “satisfacció”. Segueixen per ordre: “m’he sentit inútil”, “felicitat”, “tristesa”, “insomni”, “m’he sentit incomprès”, “m’he sentit ajudat” i per últim “m’he sentit valorat”.

La novena pregunta era una extensió de la vuitena i el que volia saber era si, en cas d'haver experimentat alguna emoció negativa, ho havien comunicat a algú i a qui.

En cas que hages experimentat alguna emoció negativa, ho has comunicat a algú? En cas afirmatiu, a qui?

76 respostes



Figura 11: Persona/es a qui els estudiants comuniquen les seves emocions negatives

Després de fer el recompte, de les 76 respostes que tenia la pregunta n'he hagut de descartar 9 perquè no tenien res a veure amb el que es demanava. De les 67 restants, 55 (82%) deien que sí que ho havien explicat. Els confidants eren pares, amics, professors i psicòlegs (en pocs casos). Les 12 respostes restants, que conformen el 18% de la mostra, diuen que no ho han explicat. La majoria d'aquestes respostes no donen motius però unes poques declaren que no ho han explicat per a no preocupar als pares o perquè tampoc hi donen tanta importància.

La desena i última pregunta anava destinada als alumnes que havien acabat l'ESO i/o el batxillerat. Volia saber si se sentien preparats per al seu futur, si havien adquirit coneixement acadèmic però no de la vida quotidiana o si havien sentit que el seu pas per l'educació havia estat inútil i no havien millorat ni personalment ni acadèmicament.

Per acabar, si has fet 4t d'ESO o BAT tria una casella

57 respostes

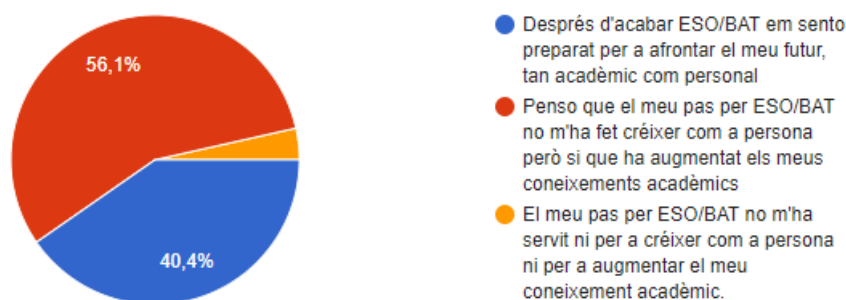


Figura 12: Opinió al final de 4t d'ESO o de batxillerat

El gràfic mostra clarament com més de la meitat dels alumnes (concretament un 56.1%) pensen que han augmentat els seus coneixements acadèmics però no han millorat com a persona. Un 40.4% dels alumnes opinen que, a part de millorar els seus coneixements, han crescut com a persones i un 3.5% opina que no ha millorat ni personalment ni acadèmicament. Alhora, vaig rebre alguns comentaris matisant les respostes, sobretot de la gent que havia dit que se sentien preparats pel futur. Deien que no havien crescut personalment gràcies al contingut curricular de l'institut sinó que el fet de passar tantes hores en una classe amb gent tan diversa els havia fet madurar.

Finalment vaig donar l'opció d'afegir algun comentari a tothom qui volgués. A més a més dels comentaris sense sentit i els de suport al treball (que s'agraeixen), va haver-hi persones que van aportar coses noves. Després de llegir-los tots unes quantes vegades, he aconseguit resumir-los en tres punts:

- 1- Quan aprenem és quan quelcom ens interessa i nosaltres mateixos ens preocupem per a obtenir la informació.
- 2- La informació i els fets es presenten com un bolet enmig del bosc, sovint sense contextualitzar i mai demostrant perquè les coses són com són. Fent-ho així, el contingut perd tot el sentit.
- 3- La intel·ligència i la capacitat d'algú no depèn només dels resultats acadèmics.

Un cop exposats els resultats de les enquestes, tinc dades per a respondre les primeres hipòtesis que havia fet. A més a més, me n'adono que hi ha altres temes que jo no havia ni pensat, però que també preocupen a les persones que han contestat.

Seguidament he fet una llista de les preguntes i temes que han sorgit al llarg del treball i el nom del capítol on es tractaran més a fons.

1- Per què els alumnes només es preocupen per si X contingut entrarà a examen?

Capítol "L'escola de la memòria".

2- Per què els alumnes no tenen interès en allò que estudien?

Capítol "Investiguem allò que ens interessa"

3- Per què l'emoció/estat més present a l'institut és l'estrès?

Capítol "Molta intel·ligència, però poca d'emocional"

4- Per què els alumnes es pregunten per a què serveix el que estudien?

Capítol "La importància del sentit"

5- És important tenir professors amb ganes d'ensenyar?

Capítol "Buscant bolets amb l'avi"

4.3- Reflexions

4.3.1- L'escola de la memòria

La capacitat de recordar és una de les millors habilitats que tenen els éssers humans. Gràcies a ella podem reviure moments que ens van emocionar, recordar a les persones que han passat a millor vida, cantar les nostres cançons preferides i aprendre noves coses. Tot i això, l'accés que nosaltres mateixos tenim al que hem viscut és limitat i no sempre fiable ja que el nostre cervell modifica els records. És per això que en una societat com la del segle XXI, on tenim Internet i robots, basar l'educació en aquesta habilitat pot ser una de les pitjors negligències que es poden cometre. No només ho dic jo: l'empresa COTEC, ([COT1], [COT2]), José Luís Crespo ([CrJL]) i Lucas Gortázar ([GoLT]) opinen el mateix. Seguidament veurem per què, però abans fem un petit viatge al passat per a veure on va néixer el nostre sistema educatiu.

Durant la segona revolució industrial, a finals del segle XIX, l'aparició de les màquines va eliminar el procés d'elaboració artesanal per donar pas a una producció més industrialitzada. Cada part de la cadena s'especialitzava en una part concreta de la feina i la realitzava de la manera més eficient amb l'ajuda d'una màquina. Aquesta millora en la producció va permetre augmentar la producció, que alhora va permetre reduir el preu del producte final cosa que, al mateix temps, va permetre a l'empresa augmentar el sou dels treballadors. Aquests, en tenir més diners, podien comprar més productes que alhora produïen benefici a l'empresa que els havia produït. Amb els beneficis, l'empresa podia invertir en màquines, seguir augmentant la producció i anar repetint aquest cicle que es va anomenar "el cicle virtuós".

L'augment de sou dels treballadors, també va fer que, a la llarga, haguessin de pagar més impostos. Amb aquests diners es va crear l'estat del benestar (sanitat i educació públiques, pensions i ajudes). Va ser així com va néixer la classe mitja i les bases del nostre sistema educatiu.

Els obrers d'aquell temps havien de saber fer tasques especialitzades i molt repetitives ja que la seva feina consistia a fer només una part del procés de producció. L'educació que rebien anava en concordança amb aquells objectius. Se'ls ensenyava exactament això, a realitzar tasques especialitzades i repetitives i també a memoritzar dades.

Han passat els anys i ens trobem en ple 2019 amb un sistema educatiu gairebé idèntic al que teníem en la segona revolució industrial. En 200 anys la humanitat ha avançat molt i entre aquests avenços hi ha els ordinadors i tota la robòtica. Aquestes creacions són increïblement bones realitzant tasques especialitzades, repetitives o feines en les que es necessiti manejar una gran quantitat de dades, precisament el tipus de tasques que aquest sistema està dissenyat per a ensenyar.

La manera com funcionen les classes acadèmiques actualment no és cap novetat ja que és gairebé igual a les que rebien els nostres pares, avis o fins i tot besavis si havien pogut anar a l'escola. Podríem classificar les assignatures en dos grans grups: segons si es basen en aprendre conceptes tangibles i/o fets (com ara la biologia, la història, la filosofia o la part de literatura de la majoria de llengües) o si es basen en resoldre problemes i/o entendre conceptes més abstractes com ara les matemàtiques, la física, una part de la química i la sintaxi i gramàtica de moltes llengües.

L'esquema educatiu de les assignatures com ara biologia, història, etc. és simple. Es parteix d'un temari que ve establert per les lleis del govern. Aquest temari és explicat a classe per un professor mentre els alumnes prenen apunts. Llavors es deixa un temps a l'alumnat perquè s'apregui el contingut (normalment fent exercicis del llibre de text o elaborant esquemes) i a l'examen es valora si el que ha respost l'alumne es correspon amb el que deia el temari.

Alhora, la manera d'ensenyar les assignatures com ara matemàtiques o física no és gaire diferent. Novament partim d'un temari però a més a més tenim un conjunt de problemes que l'acompanyen. El que fa el professor és explicar ràpidament els conceptes i després centrar-se en ensenyar als alumnes a resoldre els problemes. Llavors els estudiants, que ja saben que la totalitat de l'examen seran els problemes que han fet a classe, es dediquen a repetir una i una altra vegada els exercicis fins que aconseguen resoldre'ls d'una manera mecànica.

És gràcies a aquesta manera d'ensenyar que a les classes s'escolta freqüentment la pregunta "això entra a examen?". Els alumnes saben que a l'examen només hauran de repetir el que diu el temari. Per tant, si cert coneixement no hi entra, no sortirà a l'examen i no cal escoltar a classe. El problema és que així no fa falta que l'alumne entengui el que fa, simplement fa falta que sàpiga donar una resposta que ja ha vist escrita en un altre lloc. Per tant, el sistema no premia a qui té més capacitat de raonament o qui és més creatiu. Premia a qui té més memòria per a aprendre's el temari (o els problemes) i repetir-ho a l'examen. De fet, per incoherent que sembli, el sistema està basat en la memorització però en cap moment t'ensenyava directament a desenvolupar la teva memòria ni et dona tècniques per a estudiar eficientment.

De la mateixa manera, basar un sistema educatiu en la memòria no és la millor opció si el que volem és que els alumnes recordin durant temps el que han estudiat. Actualment el que passa és que els estudiants s'aprenen tot el temari, l'escriuen a l'examen i al cap de pocs dies ja no el recorden. Aquesta situació és encara més greu quan hi ha molts exàmens seguits. Intentar memoritzar el temari en tan poc temps és com regar una planta fins que al voltant de la seva tija es forma una bassa, apartar l'excés d'aigua amb la mà i seguir regant-la. Com podeu deduir, la planta mor ofegada.

En aquesta metàfora, la planta és el cervell de l'alumne i l'aigua és tot el temari d'una assignatura que s'ha d'aprendre. Si s'intenta aprendre tot en molt poc temps (com fan la majoria dels estudiants) augmenta l'estrès, que fa augmentar els nivells de cortisol al cervell, aquest es col·lapsa i no reté res.

Llavors, si no ho deixem per a l'últim dia i comencem a estudiar abans, semblaria que el nostre cervell no patiria tant d'estrès perquè, com que tindriem més temps, fariem sessions més curtes. A priori sembla una bona idea. Si de mitjana per a cada assignatura un alumne necessita per exemple cinc hores d'estudi, en comptes d'estudiar-ho tot la tarda abans (que seria la metàfora de la planta) podria començar a estudiar 10 dies abans i fer sessions de 30 minuts. Aquesta estratègia és factible quan hi ha un, dos o com a molt tres exàmens en dies consecutius ja que les sessions serien de com a molt una hora i mitja diàries. El problema arriba quan en una setmana hi ha vuit exàmens i en total necessitaràs 40 hores per a estudiar-ho tot.

Si seguim l'estratègia anterior i dediquem mitja hora a cada assignatura durant 10 dies, suma un total de 4 hores al dia que és només una hora menys que el que dedicaria l'alumne a estudiar una sola assignatura el dia abans. Podríem ampliar el marge de temps i començar a estudiar 20 dies abans de l'examen, però tampoc seria factible ja que quan haurem arribat a l'últim dia ja no recordarem què hem estudiat al primer.

Triem l'opció que triem, inevitablement haurem d'invertir molt temps per a memoritzar tot el temari i/o aprendre a resoldre tots els tipus de problemes. És precisament per la manera que té el sistema d'avaluar que els sentiments que més experimenten els alumnes són l'estrès i la frustració. Haver de dedicar tantes hores a estudiar (normalment de manera poc eficient ja que la gran majoria d'estudiants no tenen unes tècniques d'estudi realment funcionals) no permet que els alumnes puguin fer altres coses que ells realment voldrien fer. Tot això acaba fent que el seu nivell de felicitat disminueixi, el d'estrès s'elevi i, com he dit abans, quan estem estressats al nostre cervell li costa molt més retenir continguts. Com que no aconsegueix retenir el que està estudiant, l'alumne encara hi dedica més hores i és un cicle que mai acaba. El tema de l'estrès i les emocions el tractaré més en profunditat al capítol "molta intel·ligència, però poca d'emocional".

És tan dolent com sembla que el sistema educatiu es basi en la memorització i la mecanització si és el que portem 200 anys fent i l'únic problema és que els alumnes s'estressen una mica?

La resposta és un rotund sí.

Tornem un moment a la segona revolució industrial. En aquell moment, les màquines van facilitar la feina als obrers i això va provocar tot el “cercle virtuós” i el sorgiment de la classe mitjana i de l'estat del benestar.

En l'actualitat, les màquines són tan bones que ja no necessiten cap obrer per a fer la feina: la poden fer soles. Aleshores, què passarà amb l'obrer? La resposta és senzilla: perdrà la feina. Com he dit abans, aquests treballadors formaven (i actualment formen) la classe mitjana. Si aquests es canvien per màquines, la classe mitja desapareix i juntament amb ella l'estat del benestar.

Segons l'equip estadístic de Rafael Doménech *et alii* ([DGMN]) i l'estudi “¿Cuan vulnerable es el empleo en España a la revolución digital?” realitzat pel banc BBVA, aproximadament el 36% de les feines són de classe mitja. Si les ocupen robots, on treballaran les persones que abans ocupaven aquestes places de treball? Acabaran en feines molt bones o molt precàries.

Segons el World Development Report de 2016 ([WoDR]), a la gran majoria de països desenvolupats després de la revolució digital els llocs de treball en feines molt ben pagades i molt mal pagades augmentaran, i en feines de sou mitjà disminuiran molt.

Tot i la polivalència de les màquines, hi ha feines que no poden fer. Es necessitaran persones que programin, dissenyin i siguin capaces de fer el manteniment dels robots a més a més de persones que es dediquin a ensenyar com funcionen. Alhora, també es necessitaran persones per a fer les feines de tota la vida com ara perruquer, cambrer, etc.

Llavors és evident on aniran a parar les persones que formaven la classe mitja. Els que puguin permetre's estudiar, podran optar a llocs de treball ben remunerats i, les persones que no puguin o no vulguin estudiar, acabaran en feines molt mal pagades. Això generarà una societat polaritzada on hi haurà grans desigualtats.

Arribats en aquest punt, algú podria preguntar-se per què he explicat tot el que he explicat sobre la revolució industrial, la classe mitja, el cercle virtuós i la desaparició de la classe mitja.

Ho he fet perquè penso que la gent no és prou conscient del que està a punt de passar. Quan la revolució digital s'hagi consolidat (potser d'aquí 10, 20 o 30 anys) totes les feines per les quals el sistema ens prepara no existiran. Diversos diaris afirmen que més de la meitat de les feines on treballarà la gent l'any 2030 encara no existeixen. Llavors, per què seguim entossudits en utilitzar un sistema educatiu que prepara els alumnes per a feines que no existiran i els deixa desprotegits enfront del que pugui venir?

Ara que sabem millor que fa 200 anys com funciona el cervell, hem descobert que els humans aprenem millor si involucrem les emocions en el procés.

En el llibre *El libro de la memoria* ([OsHY]), s'explica com es formen els records, com funciona la memòria i per què oblidem. Afirmar rotundament que si els records es relacionen amb emocions duren molt més temps. Alhora, explica que les emocions positives desencadenen unes reaccions bioquímiques en el cervell que ens fan més receptius a recordar i a aprendre noves coses.

També sabem que els humans som bons improvisant i trobant solucions per a problemes que abans no teníem; som excel·lents barrejant àmbits del coneixement (gràcies a això hem inventat coses com ara la bioètica), som bons entenent les persones que ens envolten i sobretot, tenim pensament crític.

Sobresortim en tots els aspectes en els quals les màquines són inútils. Elles no tenen pensament crític, no entenen sentiments ni saben improvisar. Estan programades per a fer una feina concreta de la manera més eficient possible.

Llavors, sabem que actualment hi ha màquines que són capaces de resoldre els mateixos problemes que els alumnes d'ESO i batxillerat estan aprenent a resoldre (però de manera molt més ràpida i sense errors) i sabem que memoritzar grans quantitats d'informació ha quedat obsolet ja que des de l'aparició d'Internet i els telèfons mòbils, la gent està a segons de qualsevol tipus d'informació que pugui necessitar.

Aleshores, no seria molt millor deixar aquestes tasques per a les màquines i educar els estudiants com a persones? No seria millor ensenyar-los a destriar informació, potenciar la seva creativitat i posar-los enfront de problemes que no han tingut mai?

Realment sí.

I per què no es fa?

Segons un article publicat al diari *El País* ([ACCI]), Espanya està en els darrers llocs d'Europa quant a educació. No obtindrem resultats diferents si no fem servir estratègies diferents i, tot i que des del 2011 els partits que han guanyat les eleccions generals tenen reformes educatives, els resultats no acompanyen. Entre els anys 2011 i 2019 han estat al poder el "Partido Popular" (PP) i el "Partido Socialista Obrero Español" (PSOE), ambdós partits amb programes basats en adequar l'educació als nostres temps, individualitzar-la i millorar-la tot i que el país segueix, a l'any 2018, duplicant el percentatge europeu d'estudiants que deixen l'ESO. És evident que els canvis són lents, i que anem en bona direcció, però no tot el que diuen els programes electorals es compleix o, si més no, de la manera que aniria millor a la gent. Curiosament el programa electoral del PP el 2011 ([PP11]), partit que va guanyar les

eleccions, defensava una educació de qualitat per a tothom, sense distincions per a classe econòmica ni procedència. Tot i defensar això, fins el 2015, que és quan es va acabar la seva primera legislatura, la inversió en serveis públics (educació pública, sanitat...) va baixar un 12% mentre que els diners proporcionats a l'educació concertada van arribar a la seva xifra rècord.

A més a més, en la seva segona legislatura, entre els anys 2015 i 2018, van abaixar el pressupost per a educació, passant d'un 4% del PIB (ja de per si un percentatge inferior a l'uropeu) fins al 3.8% tot i que en el seu programa seguien defensant la inversió en educació pública ([PP15]).

A partir de la moció de censura del 2018, gràcies a la qual el PSOE va arribar al poder, a Espanya s'han aplicat noves mesures educatives que trobem recollides en el programa electoral d'aquest mateix partit ([PSOE]). Si les mirem veurem que es concentren en adaptar l'educació al segle XXI fent-la més interdisciplinària i una mica més individualitzada.

No aprofundiré més en aquestes mesures perquè l'objectiu del treball no és fer propaganda de cap partit polític. Volia exposar la situació governamental amb dades contrastades perquè quedi palès que tot i que els partits polítics diguin una cosa en els seus programes, no simple la compleixen i, fins i tot, poden arribar a fer el contrari del que han dit.

Acabaré aquest capítol exposant el que jo penso que podria ajudar a canviar aquesta situació de només memoritzar i mecanitzar contingut.

Actualment la manera d'aprendre és freda, sense gaires emocions i precisament aquest és el problema. Sabem que els humans aprenem millor quan aquestes intervenen en el procés. Aleshores potser seria una bona opció buscar una manera d'educar als alumnes de manera que després d'acabar una tasca sentin algun tipus d'emoció. És a dir, convertir l'aprenentatge en una espècie de repte.

El que proposo jo consta de dos passos:

El primer és permetre que els alumnes tinguin un foli amb apunts (on hi poden apuntar fórmules o conceptes clau) mentre fan l'examen.

Fent això evitem que els alumnes memoritzin absolutament tot el tema i els forcem a destriar la informació que ells creuen més rellevant ja que només tenen un foli per a apuntar-hi coses.

El segon pas és fer que l'examen consti de problemes/preguntes que no s'hagin treballat explícitament a classe però que amb els conceptes que els alumnes han après puguin resoldre.

D'aquesta manera, aconseguim que mecanitzar els problemes (en assignatures com matemàtiques o física) i memoritzar paràgrafs i paràgrafs de text sigui inútil alhora que aconseguim que els alumnes pensin. Que no es limitin simplement a repetir el que hi ha escrit al llibre sinó que es vegin forçats a establir connexions lògiques entre elements que coneixen per a trobar una solució.

Clarament aquest tipus d'exàmens serien molt més difícils que els que estem acostumats a trobar ja que els alumnes no estarien acostumats al problema que tenen davant. Serien reptes, i com tot repte comportaria un desconcert inicial, una fase de reflexió, alguns intents fallats, uns minuts de frustració, una nova reflexió i per últim la resolució del problema. La sensació després de superar un repte que t'ha costat no té preu i precisament perquè l'alumne passa per totes aquestes emocions és la raó per la qual aquest tipus d'exàmens són necessaris. Jo personalment recordo haver estat davant d'alguna pregunta d'aquest tipus i quan les aconseguies resoldre (si és que pots) és altament gratificant.

En cas de no aconseguir resoldre-ho, ja sigui per no entendre prou bé les idees inicials (els conceptes sobre els quals es basava el raonament per a resoldre l'exercici) o perquè, tot i conèixer els conceptes, l'alumne ha estat incapaç d'establir-hi relacions, el que s'hauria de fer és tornar a explicar-los i ensenyar als alumnes a establir relacions entre ells.

Penso, i ara ja parlo d'exàmens molt més importants, que les proves d'accés a la universitat també haurien de ser així. Que des del principi el sistema hauria de fer exàmens d'aquest tipus i, al final del recorregut, quan hauries acabat segon de batxillerat, sabries enfrontar-te a situacions noves, a problemes que mai has tingut i sabries destriar la informació valuosa de la innecessària. D'aquesta manera la gent no entraria o es quedaria fora de la carrera que vol gràcies a la memòria que té sinó gràcies a la capacitat de relacionar coneixement i resoldre nous problemes.

És per tots els arguments que he donat en aquest capítol, que penso que el sistema educatiu necessita basar-se en les habilitats humanes i no pas en la memorització. Si seguim com fins ara, arribarà un moment en el qual el que sortirà del sistema educatiu seran robots mentre el que sortirà de les nostres fàbriques seran màquines amb una intel·ligència artificial comparable a la dels propis humans.

4.3.2- Investiguem allò que ens interessa

Un cop hem aclarit per què els alumnes es preocupen tant per saber què entrarà a examen i hem vist els inconvenients de tenir un sistema basat en la memorització, és hora d'avançar i seguir responnent a les preguntes que ens hem fet a l'inici. En aquest capítol intentarem saber per què els alumnes perden l'interès pel que estudien tenint en compte les opinions de Jaime Altozano ([AltJ]), Alfonso Blanco ([BlaT]) i Juli Garbulsy ([GaJT]). Aquest fet és cada dia més comú i així ho reflexen les enquestes, on el sentiment que els alumnes més identifiquen dins l'aula és l'avorriment/falta de sentit seguit de la indiferència. De la falta de sentit en parlarem al capítol titulat "La importància del sentit". En aquest ens centrarem sobretot en els altres dos.

Permetin-me començar el capítol amb una breu comparació estreta de Prince Ea ([EaPR]):

Imaginem un metge. Aquesta persona està al càrrec de diversos pacients i cada pacient té una malaltia diferent que necessita atenció individualitzada. Què passaria si a tots els proporcionés el mateix tractament? Lògicament alguns es curarien però la gran majoria empitjorarien ja que el que ha prescrit el metge no té cap efecte sobre aquella malaltia.

Ara imaginem un professor que està al càrrec de tota una classe d'alumnes. El seu aprenentatge (i en conseqüència el seu futur) depèn d'ell. Alhora, cada alumne és diferent ja que tots tenen habilitats i interessos genuïns. Què passaria si els ensenyés a tots de la mateixa manera?

Uns estarien atents i aprendrien, i altres, el que el professor ensenyés no els interessaria gens i desconnectarien.

Llavors, si tractant els pacients de manera personalitzada es curen, potser si individualitzem l'educació els alumnes sortiran més preparats i estaran més atents a classe.

Seguidament intentarem aprofundir més en aquesta hipòtesi, però per a fer-ho primer cal entendre com funciona l'ESO. L'educació secundària consta de 4 cursos. Al llarg d'aquests els alumnes fan assignatures que cobreixen la majoria d'àmbits del coneixement, des del científic fins a l'artístic passant per l'humanístic. A més a més, a cada curs es permet triar una o dues assignatures optatives. Al final de l'ESO se suposa que l'alumne ja ha adquirit una sèrie de coneixements més o menys profunds en les matèries que ha cursat. Rep un títol i llavors decideix si vol seguir estudiant o no.

El que jo em pregunto és: "És necessari que tothom tingui coneixements més o menys profunds en tots els àmbits?" o, posat en forma d'exemple: "És necessari que un

alumne que a 3r d'ESO ja sap que el seu futur no passa per cap tipus de carrera científica segueixi fent matemàtiques durant 2 cursos més?"

És evident que tothom necessita una base de coneixement. Hom necessita saber llegir, escriure, entendre un text, parlar un o dos idiomes, tenir un mínim de cultura i saber relacionar-se amb el seu entorn. Tanmateix, el que no veig necessari és que algú que no farà cap tipus de carrera científica hagi d'aprendre a descomposar polinomis de tercer grau i saber què és una cotangent, ni que algú que no farà cap carrera social o d'humanitats hagi d'estudiar de manera profunda història.

Aquí podríem entrar en el debat sobre la importància d'estudiar història, dir que és important conèixer el passat per a no repetir els mateixos errors i que la societat actual és la que és gràcies als fets que van ocórrer en temps passats. Això és innegable i hi estic completament d'acord però penso que es podria matisar una mica. De la mateixa manera que algú pel seu dia a dia necessita saber sumar o fer regles de tres però no necessita saber què és una funció definida a trossos, tampoc necessita saber que a X any va manar X rei a X país ni que les causes de l'abdicació d'aquest rei van ser X, Y i Z.

És més, no tan sols és que no ho necessiti en el seu dia a dia, segurament ni vulgui saber-ho. El pitjor és que els alumnes són avaluats segons el coneixement que tenen sobre aquest àmbit que ni els interessa ni va en concordança amb les seves habilitats.

Gràcies a aquesta situació va néixer la famosa frase " Si jutges a un peix per la seva capacitat per a escalar un arbre, viurà pensant que és inútil."

Aleshores, què podríem fer per aconseguir que cada alumne rebi una educació adaptada als seus interessos i habilitats però que alhora compleixi uns mínims de coneixements generals?

El que jo proposo és, en primer lloc, dividir les assignatures de mates i història en dues parts, una de més general i l'altra on s'aprofundís més. La part més "senzilla" seria obligatòria per a tots els alumnes i la part més avançada seria optativa.

En segon lloc, el que proposo és augmentar el número d'optatives a partir de 3r d'ESO. Després d'acabar 2n d'ESO alguns alumnes ja saben per on no volen encarar el seu futur. Aquest és el moment ideal per a implementar un curs basat majoritàriament en optatives de 2 hores setmanals.

Tot i deixar triar 6 matèries als estudiants, hi hauria d'haver unes assignatures obligatòries com català, castellà, anglès, matemàtiques, història, educació emocional, ètica i tutoria. Als 3 idiomes se'ls hauria de dedicar 3 hores setmanals ja que la base de la comunicació és l'idioma i sense dominar l'idioma un no es pot expressar bé ni comprendre adequadament allò que està aprenent. A les assignatures de

matemàtiques, història, educació emocional i ètica se'ls dedicaria dues hores i a tutoria, una.

La resta del temps els alumnes haurien de poder triar el que volen estudiar. He proposat diverses assignatures i les he dividit les optatives en 4 blocs:

Científic-tecnològic: matemàtiques avançades, biologia, tecnologia, física i química

Social-humanístic: lectura (en qualsevol idioma)/taller d'escriptura (la meitat de les hores una i l'altra meitat l'altra), aprofundiment d'història, filosofia, segon idioma estranger (francès, alemany, xinès...)

Artístic: dansa, música, pintura, escultura

Quotidià: educació física, informàtica, educació financera, cuina i nutrició

Aquest sistema només tindria una restricció que seria que si com a optatives has triat educació financera, tecnologia o física i química has de fer forçosament l'optativa de matemàtiques avançades.

Cursant 3r i 4t d'ESO d'aquesta manera els alumnes haurien adquirit uns coneixements bàsics durant la primària, 1r i 2n d'ESO. A 3r ja haurien pogut començar a escollir l'itinerari que s'adeqüés més als seus interessos i haurien deixat de banda aquelles assignatures en les quals no necessiten un coneixement profund. D'aquesta manera, aconseguiríem reduir l'avorriment i el desinterès dels alumnes a les aules ja que haurien triat allò que volen estudiar.

Tanmateix, encara que aconseguim personalitzar les assignatures per a cada estudiant, no aconseguirem eliminar l'avorriment ni el desinterès de les aules si no canviem la manera com fem les classes. Com he dit en el capítol "l'escola de la memòria", les classes normalment consisteixen en què el professor explica el temari mentre els alumnes prenen apunts. És a dir, una classe on l'alumne té un rol majoritàriament passiu tot i que de tant en tant se li fa alguna pregunta. Sabem que el cervell aprèn millor quan hi intervenen emocions però amb la manera de fer les classes actualment les úniques que hi trobem són avorriment i desinterès.

Què podríem fer per a canviar això?

La resposta la podem trobar si mirem enrere fins als nostres primers anys de vida (o si tenen fills, als seus primers anys de vida). De ben segur que remenaven i exploraven tot el que els envoltava de manera incansable i fins i tot perillosa en alguns moments. Segurament a tots vostès de petits el vostre pare o mare en servir-los un plat a taula va dir-los que esperéssiu una mica, que el menjar cremava. Amb més seguretat encara diré que la gran majoria de vostès no va esperar, va empassar-se la cullerada i es va cremar.

A partir d'aquell moment, el seu cervell va entendre que el menjar sortit del foc crema tot i que en realitat ja ho sabíeu, el pare o la mare ho havia dit abans però no n'havíeu fet cas.

Aquest petit exemple serveix per a explicar les diferències entre aprenentatge actiu i passiu. En l'exemple, l'aprenentatge passiu és saber que el menjar cremarà perquè la mare ho ha dit i l'aprenentatge actiu és saber que el menjar realment crema perquè l'has tastat i t'has cremat.

Com hem vist, l'aprenentatge actiu és el que més fèiem servir de petits. Llavors, per què no seguir fent-lo servir de grans?

Si canviem les classes on el professor només parla per classes on el professor proposa una sèrie de bibliografia/webgrafia de diferents nivells sobre un tema i els alumnes han de treballar sobre allò, no només entrenarem la capacitat de destriar informació i el treball en grup sinó que haurem fet que els alumnes investiguin un tema per ells mateixos i de manera activa.

A més a més, si la tasca és individual, haurem aconseguit que cada alumne treballi segons les seves capacitats i el seu nivell d'autoexigència de manera que pugui fer un treball més profund i complet o més senzill i resumit segons cregui convenient.

En referència a l'última part, dedicada a treballar en projectes, el professor ha de saber ajudar als alumnes si tenen algun dubte i proporcionar-los més informació si la demanen. També ha de ser conscient que en els treballs en grup, si està compost per més de 2 o 3 persones normalment hi ha algú que està sense fer res. Cal evitar aquestes situacions ja que sinó la feina es reparteix de manera desigual i els alumnes que volen treure millor nota acaben fent la feina als que els és igual la puntuació.

Per finalitzar el capítol voldria dir que totes les propostes per a millorar el sistema que he fet durant aquest necessiten la predisposició de l'alumne a voler aprendre. A l'hora de basar un curs majoritàriament en optatives hi haurà qui no voldrà aprendre res en cap àmbit i triarà les optatives més "divertides" o on pugui fer menys feina. Tot i això, també hi haurà qui realment ho aprofitarà perquè veurà que és una oportunitat per a desenvolupar les seves capacitats i enfocar-les plenament cap al seu futur.

4.3.3- Molta intel·ligència, però poca d'emocional

Com ja he anat explicant al llarg del treball, les emocions són quelcom que és essencial per a crear records. Si sabem gestionar-les correctament poden ser les nostres millors aliades però alhora, si no sabem fer-ho bé poden ser la pedra que ens arrossegui fins al fons del mar.

Segons Gabriel Rodríguez ([RoGT]) en l'àmbit professional algunes de les habilitats més ben valorades per les empreses són la capacitat de treballar en equip, la de sobreposar-se a nous problemes i la d'entendre les emocions de la gent que t'envolta. Totes aquestes habilitats tenen un alt component emocional: treballar en equip pot ser molt gratificant però a vegades també altament estressant ja que no sempre els components del grup s'avenen a la perfecció. Sobreposar-se a nous problemes implica saber gestionar la sorpresa inicial que comporta un repte inesperat conjuntament amb l'estrès i la frustració que arriben quan no es pot superar la dificultat en els primers intents. Finalment per a entendre les emocions de l'altra gent i com se senten hom ha de ser capaç d'identificar tota una sèrie de sentiments i de signes no verbals (com ara posició corporal, mirada, etc.) que emet l'altra persona.

Les emocions també estan presents en el nostre recorregut per l'ensenyament tot i que, desgraciadament, no solen ser agradables. Segons els resultats de les enquestes que vaig fer, de les 5 més comunes (estrès, frustració, satisfacció, sentiment d'inutilitat, felicitat i tristesa), 3 són negatives.

L'estrès sol estar produït per la gran quantitat de feina i temari que els alumnes han d'estudiar; la frustració i la tristesa per no veure's capaços d'aconseguir acomplir amb èxit les tasques que han de fer; la satisfacció i la felicitat quan veuen que el seu esforç ha donat resultat i la inutilitat quan se'ls avalua en àmbits que no tenen res a veure amb les seves habilitats.

Estem rodejats d'emocions pertot arreu, algunes de positives i altres de negatives. Reaccionar a les positives és molt fàcil, aquestes fan que el cervell alliberi dopamina i ens sentim immediatament contents. D'altra banda, les negatives són més difícils de controlar ja que fan que el cervell alliberi cortisol, una hormona que ens posa en estat d'alerta, provoca que estiguem més susceptibles a qualsevol canvi i afecta molt negativament a la nostra capacitat per a crear records i recordar els que ja tenim.

Si a classe un alumne mostra estrès o frustració enfront certa activitat de manera repetida, és possible que desenvolupi una indefensió adquirida enfront aquesta activitat.

Es pot entendre molt fàcilment què és la indefensió adquirida amb una historieta:

Hi havia una vegada un circ que tenia molts animals per a fer les seves funcions. Entre ells hi havia un elefant molt petit que, perquè no escapés, el tenien lligat amb una cadena a un pal de fusta. L'elefant intentava escapar-se cada dia però en ser petit no tenia prou força per a desenganxar el pal de terra o trencar la cadena. Va arribar un dia que va veure que per molt que ho intentés, mai aconseguiria escapar-se del circ i va acceptar com seria la seva vida. Els anys van anar passant i l'elefant anava creixent. Al cap de cinc anys s'havia fet enorme i molt més fort, però seguia lligat a una petita estaca de fusta per una cadena. Qualsevol persona hagués vist que aquella estaca no era suficient per a retenir l'elefant ja que, amb una petita estrebada, l'hagués arrancat del terra i hagués pogut marxar. Tanmateix, l'elefant ni ho intentava. Dins seu encara era aquell elefant petit que intentava arrancar l'estaca del terra sense èxit. Per això, tot i que hagués volgut escapar ell sentia (a causa de les seves experiències prèvies) que seria inútil fer-ho i per això no feia res.

El fet de no elaborar cap tipus de resposta voluntària enfront un estímul determinat perquè en el passat ja s'ha viscut aquest estímul i totes les respostes donades han estat inútils es coneix com a indefensió adquirida.

Segons R. Martos ([MarR]) aquest fenomen es va demostrar en animals l'any 1967 en un experiment que Overmaier, Seligman i Maier van fer amb gossos. En aquest hi havia 3 grups de gossos: el que podia escapar, el que no podia i el grup control.

Fase aversiva:

Els gossos del grup que podia escapar eren sotmesos a descàrregues elèctriques però mitjançant una resposta voluntària podien aturar-les.

Els gossos del grup que no podia escapar eren sotmesos exactament al mateix tipus de descàrregues elèctriques però no podien aturar-les de cap manera.

Els gossos del grup control no van ser sotmesos a cap tipus de descàrrega.

Fase prova:

Després d'aquesta primera fase on els gossos havien estat en situacions diferents, van sotmetre els 3 grups a la mateixa prova. La prova era, de nou, amb xocs elèctrics però aquest cop hi havia manera d'escapar (lògicament la manera d'escapar era diferent a la que els gossos del grup que podia aturar les descàrregues havien experimentat abans).

Els resultats van ser clars: els gossos del grup que podia escapar i del grup control van aconseguir parar les descàrregues mitjançant una acció voluntària concreta mentre que els gossos del grup que inicialment no podia frenar les descàrregues van elaborar respostes molt pobres o no van ni intentar fugir.

Les conclusions de l'experiment van ser que la indefensió adquirida es manifesta a través de 3 tipus de dèficits:

- 1- Dèficit motivacional. L'organisme tarda a començar a emetre respostes (si és que ho fa). Si les respostes elaborades no afecten a les conseqüències, en un futur és molt probable que no s'emetin respostes.
- 2- Dèficit cognitiu. L'organisme mostra dificultat per aprendre que una resposta controla una conseqüència.
- 3- Dèficit motivacional. Si a la fase aversiva (en aquest cas tractament amb xocs elèctrics) ha estat prou intensa, desencadena un estat de por, frustració i finalment depressió.

Entre els anys 1974 i 1975, els científics Hiroto i Seligman ([MarR]) van demostrar que aquest efecte també es desenvolupava així en humans i l'any 2010 la investigadora i doctora en psicologia Charisse Nixon ([NixC]) va realitzar un experiment amb alumnes d'institut que va servir per a demostrar que la indefensió adquirida no només està present a les aules sinó que pot ser provocada de manera voluntària.

En aquest experiment va repartir fulls amb 3 paraules als alumnes. Els va demanar que fessin un anagrama amb aquelles paraules i els va dir que quan el tinguessin resolt que no diguessin res sinó que aixequessin la mà. Els alumnes no ho sabien però hi havia dues llistes diferents, una on els dos primers anagrames eren fàcils i l'altra on eren irresolubles. La tercera paraula era la mateixa a les dues llistes.

La professora va donar l'ordre de resoldre el primer. Com era d'esperar, els alumnes amb anagrames fàcils el van resoldre en un moment mentre que la meitat amb irresolubles va seguir pensant fins que la professora va dir que fessin el segon. Novament va passar el mateix que havia passat amb el primer.

Finalment, va ordenar als alumnes que ressolessin el tercer, que era igual per a tots. Els alumnes que havien tingut els anagrames fàcils el van resoldre en un moment mentre que els que havien tingut els irresolubles només uns pocs van aconseguir-ho.

Quan ja s'havia acabat l'experiment la professora va preguntar als alumnes que tenien els anagrames irresolubles com s'havien sentit en veure que la meitat de la classe

havia aixecat la mà i per què creien que no havien pogut resoldre el tercer. La majoria van respondre que s'havien sentit estúpids, frustrats o que s'havien posat nerviosos. També van dir que quan va arribar el moment de resoldre el tercer, la seva confiança s'havia esfumat completament.

Ara bé, què podem fer si detectem que algun o molts alumnes han generat una indefensió adquirida enfront d'un tema? Com solucionem aquesta situació on els alumnes ja ni intenten entendre el que fan perquè ho han provat molts cops anteriorment sense aconseguir-ho?

L'evidència científica ens diu que els factors que desencadenen la indefensió adquirida són la frustració i la impotència. Les persones que les pateixen acaben pensant que no és que la cosa que estan fent sigui difícil, és que ells són incapaços de fer-la. Per tant, el que hem d'aconseguir és acabar amb aquesta creença.

Dins les aules en el procés per a solucionar-ho hi intervenen tant l'alumne com el professor:

Primer de tot hem d'aconseguir que el propi estudiant sigui conscient que ha desenvolupat una indefensió adquirida i que haurà de fer una sèrie de coses per a solucionar-ho. En segon lloc, el professor haurà d'adaptar el contingut a l'estudiant. De la mateixa manera que una persona que ha estat mig any lesionada no pot córrer una maratón només rebre l'alta, una persona que està intentant superar una indefensió adquirida no pot començar estudiant els continguts més difícils sinó que ha de tornar a les bases. El tercer pas és fomentar l'autonomia de l'estudiant perquè de mica en mica pugui anar aprenent de manera autònoma seguint el seu ritme i, el quart i últim pas, consisteix en entendre que l'error forma part de l'aprenentatge i que equivocar-se no té res de dolent mentre en sapiguem treure conclusions.

Sigui com sigui, la millor manera de combatre una indefensió adquirida és fent el possible perquè els alumnes no la desenvolupin, i això és tasca dels professors.

Vists els efectes que tenen les emocions negatives sobre els estudiants (i sobre les persones en general), què és la indefensió adquirida i com curar-la, seria interessant introduir dins el sistema educatiu una assignatura que ensenyi als estudiants a gestionar les seves emocions. Això no només els ajudaria a reduir l'estrès en períodes d'alta activitat acadèmica o a minvar les possibilitats que desenvolupin una indefensió adquirida sinó que també els ajudaria a la vida quotidiana. Una persona que sap identificar les seves emocions és capaç de controlar la ira i actuar amb sang freda en moments en què sigui necessari, cosa que li estalviarà molts problemes.

També és capaç d'entendre què li passa a la seva parella o per què el seu amic està trist i ajudar-los. A més a més, si l'alumne vol fer alguna carrera com dret o medicina, aquesta assignatura li haurà estat altament profitosa ja que en aquestes professions hi ha moments on la tensió i la pressió són molt altes i mantenir la calma és crucial.

Per acabar aquest capítol, voldria dir que actualment la felicitat dels alumnes a l'escola és totalment irrellevant i això es reflexa en les enquestes. Com va dir Eduardo Sáenz de Cabezón a l'entrevista que li vaig fer, els pares pensen que si el seu fill/a porta bones notes a casa vol dir que a l'escola li va bé. El que en realitat haurien de mirar és si el seu fill/a està aprenent coses que realment li serveixen i si és feliç.

Alhora, la gran majoria de professors no es preocupen per si els seus alumnes són feliços durant la classe, simplement arriben, fan la seva classe i marxen. Si ens preocupéssim més per la felicitat dels alumnes que pel contingut que estan explicant serien més productius i tindríem millors resultats.

Si això els sembla una tonteria, els posaré com a exemple el sistema educatiu finlandès. Fa poc més de 30 anys Finlàndia tenia un sistema educatiu com el d'Estats Units o la resta del món. Van adonar-se que no funcionava, que tenia carències. Llavors van reformar completament el sistema i el van basar en la felicitat.

Els alumnes gairebé no tenen deures, poden passar la tarda fent activitats que gaudeixin com ara socialitzar-se o fer esport. Han suprimit els exàmens de selecció múltiple i cada alumne pot escollir les seves assignatures. Als exàmens l'alumne pot respondre de manera lliure i pot raonar el que diu perquè no es basen en memoritzar coses. La base de tot és donar eines als joves perquè aprenguin a fer servir el seu cap i a pensar per ells mateixos. També han suprimit l'educació privada, així els fills dels rics aprenen i juguen amb els nens/es que no ho són.

Amb tot això aconsegueixen que els alumnes siguin feliços i, si algú pensa que educant així els alumnes no surten preparats pel futur, s'equivoca completament ja que els seus estudiants, segons les estadístiques, són els més ben preparats de tot el món occidental.

4.3.4- La importància del sentit

Vivim en un món on la majoria d'accions venen motivades per una causa. Si anem a comprar menjar al supermercat és perquè tenim la nevera buida i si netegem la casa és perquè està bruta i la volem veure neta. La majoria de persones quan realitzem quelcom és perquè perseguim un objectiu (emocional, o material) i aquesta acció és el que ens apropa a on volem arribar. Per dir-ho d'alguna manera, que es desencadeni la conseqüència desitjada és el que justifica i dona sentit a la nostra acció.

En capítols anteriors hem explicat per què les emocions més usals a classe són avorriment i estrès i la importància de l'interès a l'hora d'aprendre. En aquest ens centrarem en la pregunta "per què els alumnes no troben sentit al que estudien?" i intentarem trobar-hi una solució.

Aquest tema va sorgir a l'entrevista que em va concedir Eduardo Sáenz de Cabezón i els dos vam concloure que els professors havien d'aconseguir donar sentit al que estaven explicant. Si no ho fan, passa el que està passant amb alguns alumnes en algunes assignatures: un sentiment de pèrdua de temps, indiferència i apatia cap a la matèria ja que els alumnes no entenen per què aprenen el que aprenen ni hi troben cap mena d'importància.

Un cop sabem el que hem de fer, el següent pas és trobar la manera de fer-ho. Evidentment no hi ha una sola manera d'explicar als alumnes la importància de X contingut ni tots els arguments serviran per a tots els estudiants, però els mestres s'han de saber adaptar als diferents interessos de l'alumnat i trobar opcions per a fer-los l'assignatura més propera i que hi trobin el sentit.

El que s'hauria de fer és intentar presentar els continguts relacionant-los amb temes que provoquin curiositat als estudiants. Podrien ser coses a les quals l'alumnat dediqui temps fora de l'aula o hi tingui afició com per exemple sèries, llibres, esports, música actual o videojocs.

Per a exemplificar-ho millor posaré com a exemple les assignatures de matemàtiques i llengua i literatura:

Matemàtiques

Les matemàtiques solen ser l'assignatura a la qual se li dona menys sentit. Es presenten com una assignatura troncal en la formació dels estudiants però gairebé mai els alumnes s'adonen de la seva importància ja que no es contextualitzen en la vida quotidiana. Per a un alt percentatge dels estudiants són una sèrie d'exercicis amb números que serveixen per a aprovar i obtenir el certificat al final de l'ESO, però que mai més tornaran a necessitar fora de l'institut a no ser que facin una carrera de ciències.

A més a més normalment s'expliquen per sobre i, com hem vist al primer bloc del treball, no s'entra gairebé mai en el tema de les demostracions. Això fa que els alumnes tinguin accés a un coneixement que no saben per què és així i no el valorin com quelcom útil sinó que se'l mirin com quelcom que no faran servir per a res més enllà d'aprovar. També ajudaria explicar-les d'una manera no tan teòrica sinó més pràctica relacionant el que es treballa amb la seva aplicació a la vida real. Per exemple, quan s'estudiïn els polinomis i les funcions relacionar-ho (amb tanta profunditat com el docent cregui convenient) amb els sintetitzadors de veu que ajuden a fer la música electrònica, la música en general o amb gran part de la tecnologia dels smartphones. La part més geomètrica de les matemàtiques es pot relacionar amb la construcció i la naturalesa i l'estadística amb l'algoritme de Youtube o de qualsevol altra plataforma. Alhora, les matemàtiques es poden relacionar amb molts trucs de màgia i, començar la lliçó amb un truc, seria molt útil per a captar l'atenció dels alumnes des de bon principi.

Llengua i literatura

A la llengua i la literatura se'ls dóna una mica més de sentit que a les matemàtiques. Dominar alguns idiomes és essencial per a poder comunicar-se i escriure correctament. Sens dubte, la part més feixuga d'aprendre és la gramàtica i per aquesta raó hauria de ser on els professors s'esmercessin més per a fer-la arribar d'una manera interessant als alumnes. El que jo proposo és fer servir sagues literàries o cançons per a explicar conceptes com ara la morfologia verbal, practicar el vocabulari o extreure'n frases per a analitzar. D'aquesta manera aconseguim relacionar l'aprenentatge de l'alumne amb una història que l'enganxa i el manté concentrat en el tema ja que no se li fa tan avorrit. Alhora, aconseguim que l'alumne trobi sentit al que està fent ja que ho pot relacionar fàcilment amb quelcom que coneix.

La literatura es presenta als alumnes com a cultura general, com a manera d'entendre la societat d'aquella època i com a eina per a desenvolupar l'esperit crític. Normalment a classe s'explica per sobre el context i les característiques de cada moviment i finalment es passa a explicar els autors més representatius i algunes de les seves obres.

Fent-ho així, els alumnes no es prenen la literatura com quelcom que reflecteix la realitat social de l'època sinó com una sèrie de característiques que simplement s'han d'aprendre i repetir a l'examen. Al final acaben aprenent moltes dades aïllades però no entenen la visió global del moment històric. Saben a quin any va néixer X autor, quines eren les seves característiques a l'hora d'escriure i els seus ideals però no saben per què són així. A més a més, s'està demanant als alumnes que opinin, que facin comentaris de text i comparin textos d'autors diferents quan no han tingut temps de llegir cap obra seva.

El que proposo és vincular les assignatures d'història, filosofia i la part de literatura de les llengües. D'aquesta manera quan a història es treballi un moment concret, a literatura s'estarien treballant les obres d'aquell mateix període i a filosofia els corrents ideològics. La superficialitat amb la qual s'explica el context es veuria solucionada per l'assignatura d'història i, alhora, treballar la literatura d'aquella època aportaria a l'estudiant una visió més subjectiva sobre el moment. A més a més, no s'explicarien únicament les obres en paper sinó que també estaria bé fer cinc cèntims de la música i la pintura de l'època ja que això ajudaria molt en la comprensió global. La filosofia acabaria de cohesionar tot aquest marc de coneixement històric i literari ja que si entenem els fets que van passar, entendrem com pensaven les persones de l'època i per què la seva escriptura, pintura i música van marcar les característiques del moviment.

També estaria bé deixar unes setmanes entre tema i tema de literatura per si algun alumne, de manera totalment voluntària, decidís llegir les obres dels autors. No podem exigir a tots els alumnes que llegeixin tota la literatura d'un moviment, però hem de permetre als que ho vulguin que ho puguin fer sense haver d'estressar-se perquè no tenen temps per a fer-ho.

Les estratègies que hem fet servir en els dos apartats anteriors es poden aplicar a gairebé qualsevol assignatura. En última instància, l'objectiu és aconseguir que els alumnes vegin que hi ha coneixement més enllà del que aprenen a l'escola i que aquest sol ser el més interessant. El que es busca és que l'alumne senti motivació cap a voler aprendre i fer que el motiu pel qual estudia sigui per satisfer la seva curiositat no pas per aconseguir un títol. Tanmateix, cada alumne té un caràcter diferent i serà gairebé impossible tenir a tota la classe motivada, però sí a una bona part.

Donant més sentit als continguts també aconseguirem que els estudiants, no només siguin capaços de donar una resposta el dia de l'examen, sinó que entenguin realment el que estan fent i per què és d'aquella manera i no d'una altra.

Tanmateix, segons les meves enquestes, gairebé un 38% dels alumnes aconsegueixen aprovar sense entendre el que estan fent. Això és bastant greu perquè demostra que els nostres alumnes no saben el que fan. Tot això hauria de fer-nos replantejar coses com ara el significat de la pròpia paraula entendre.

Normalment quan un professor després d'explicar quelcom pregunta a classe "ho heu entès?" el que està preguntant en realitat és si els alumnes sabrien elaborar una resposta similar a l'explicació que acaba de fer. En cas que un alumne digui que no ho ha entès el professor o bé tornarà a repetir la mateixa explicació o bé intentarà buscar una altra manera d'explicar-li-ho a l'alumne. Si, de nou, no ho entén, l'alumne normalment ja es dona per vençut i simplement memoritza el que ha dit el professor.

Posem un exemple: imaginem que el mestre està explicant per què plou i en acabar un estudiant li diu que no ho ha entès. Els altres alumnes se'l miren i responen "plou perquè l'aigua es condensa als núvols i llavors cau". L'estudiant que havia fet la pregunta segueix sense entendre-ho i aleshores el professor intervé i diu: "plou perquè l'aigua es transforma en vapor, forma els núvols, es condensa i cau". A efectes pràctics, l'explicació és gairebé la mateixa i el nen segueix sense entendre per què plou.

Amb l'afirmació "no ho entenc", l'alumne no està dient que no sàpiga repetir el que ha dit el professor o els seus companys. El que està dient és que no entén què vol dir "condensació", que no sap com funciona el cicle de l'aigua i que no comprèn per què l'aigua en estat gasós és menys densa que en estat líquid ni per què passa això i no una altra cosa.

Probablement, la resta de la classe que suposadament "ho ha entès" tampoc compregui tots aquests conceptes sinó que simplement saben donar una resposta i per això creuen que ho entenen. Entendre no és saber donar una resposta, entendre és saber per què quelcom passa d'una manera determinada i no d'una altra i quins són els mecanismes que ho provoquen.

Malauradament, fins i tot els llibres estan dissenyats perquè els alumnes sàpiguin donar respostes en comptes de comprendre realment el que estan fent. A aquesta idea li dona suport el físic Richard Feynmann en una anècdota que explicaré a continuació ([AltJ]):

Acabada la Segona Guerra Mundial, Feynmann va ser convidat a un congrés per a decidir quins llibres de text s'usarien a Califòrnia. Va examinar-los i un li va cridar l'atenció. En una pàgina hi havia una fotografia d'un cotxe, una joguina de corda i un nen amb bici. Sota tot això hi havia la pregunta: "Què els mou?".

Feynmann va pensar que aquelles fotografies eren una introducció per a parlar de l'energia química (cotxe), l'energia mecànica (joguina de corda) i la biologia (el nen). Quan va passar la pàgina, la decepció que es va endur va ser majúscula. La resposta a la pregunta era "Els mou l'energia". En cap moment es responia d'on venia aquella energia o, el que és pitjor, ni tan sols es plantejaven preguntes sobre què és l'energia en si ni com havia arribat l'energia que movia els objectes. En veure la resposta, Feynmann va dir que aquella resposta era inútil i incomplerta. El que haurien de fer els nens és manipular les joguines, veure que dins la de corda hi ha una molla i que gràcies a aquesta molla funciona. Haurien d'aprendre com funcionen les rodes i les molles i un cop saben com va la joguina, llavors començar a estudiar l'energia.

El pitjor és que si això passa en una classe i un alumne diu "no entenc què els mou" perquè la resposta que li han donat no té sentit per ell i en vol una de més elaborada i amb més sentit, els companys li diran que és evident que aquella és la resposta i que no hi ha més volta de full.

Fins i tot el professor li dirà que és l'energia que mou el cotxe, el nen i la joguina. En aquest moment, el nen assimilarà que hi ha coses que no tenen resposta i/o que val més la pena no preguntar i això és el que no volem que passi.

Durant tot el capítol he estat defensant la importància que té donar sentit al que aprenem, que creï curiositat en l'alumne però, si arribat el punt on això li crea prou interès com per a escoltar l'explicació i preguntar, donem respostes tipus "els mou l'energia" o "plou perquè l'aigua es condensa i cau" tota la feina que hem fet haurà estat en va. És en aquest moment on el dubte de l'alumne és manifest, que el professor ha d'aprofitar per a aportar nova informació a l'estudiant perquè compregui millor el tema, el seu context i pugui, per ell mateix, resoldre el dubte.

4.3.5- Buscant bolets amb l'avi

El primer dia que vaig anar a buscar bolets amb el meu avi i el meu tiet devia tenir uns cinc o sis anys. Vam anar cap al bosc (no us diré quin perquè com a bon català això no s'explica) i vam aparcar el cotxe en una esplanada que vam trobar per allà. Vam agafar els cistells i ens vam endinsar al bosc.

Quan havíem caminat una estona el meu tiet es va aturar un moment a cordar-se les botes i el meu avi va aprofitar per a inspeccionar la zona. Jo, encuriós, el vaig seguir. Vam acostar-nos a uns pins que hi havia allà al costat i vam trobar-hi un bolet. Jo estava molt emocionat per la troballa però el meu avi no ho semblava pas. Va collir el bolet i li va donar la volta. Per sota era blanc.

Llavors em va dir: “veus, aquest bolet si te'l mires des de dalt sembla un rovelló però si li dones la volta és blanc i hauria de ser vermellós”. Aquell bolet no era un rovelló sinó que era una lletraga, un bolet que és preferible no consumir i el vam haver de deixar.

Vam seguir caminant i al cap d'una estona el meu tiet va avisar-nos que havia trobat bolets. Vam anar fins on era ell i davant seu, en una zona ombrívola, hi havia molts camagroc. Jo no entenia com podia haver-n'hi tants de junts i llavors el meu avi em va dir: “ quan trobis un bolet, inspecciona els voltants perquè normalment n'hi haurà més.” No va ser fins anys més tard, quan vaig estudiar els fongs a l'assignatura de biologia que vaig comprendre el perquè d'aquella frase.

Vam seguir amb la nostra excursió i vam anar trobant molts tipus diferents de bolets. Al migdia ja havíem omplert els cistells i vam decidir tornar a casa.

Avui dia, gràcies al que em va ensenyar el meu avi sobre el bosc i els bolets, sóc capaç d'anar a buscar-los sol o amb el meu germà.

Segurament tots vostès s'estaran preguntant què hi té a veure amb l'educació aquesta història sobre anar a buscar bolets. La resposta és simple, el coneixement també el podem entendre com un bosc.

Les espècies que hi habiten, tant animals com vegetals, són els diferents àmbits del coneixement i, com passa en els boscos reals, hi ha relacions entre elles. Un bon exemple seria la relació de mutualisme entre la tecnologia i la ciència. Els avanços en tecnologia permeten millorar els procediments que s'empren en ciència. Això ajuda a seguir avançant en la investigació i descobrir noves coses i, cada cop que esbrinem quelcom nou, tenim un altre punt de partida per a crear tecnologia.

En els boscos normals a vegades hi ha incendis. En el nostre bosc metafòric, els incendis són els grans descobriments que fan que haguem de reformular totes les nostres hipòtesis, aquelles troballes que qüestionen tot el que sabem fins al moment i fan que ens haguem d'adaptar. Tanmateix, aquests descobriments són els que ens fan avançar més.

Tornant a la història del meu avi, podem establir diverses correlacions:

La primera és entre el bolet que semblava un rovelló però al final resultava ser verinós: Amb la informació passa una cosa semblant. En ple segle XXI, on les persones estem sobreexposades a la informació, és important saber triar quina és la certa. Hem d'estar atents ja que de la mateixa manera que no tots els bolets que semblen comestibles ho són, no tota la informació és fiable ni tota la que ho sembla ho és.

També podem veure una semblança entre el moment on el meu tiet troba els camagroc en una zona ombrívola i el coneixement real:

Moltes vegades la informació que busquem no està en els llibres que tothom ha mirat o entre els primers resultats de Google. No està "a la llum" sinó que està "a l'ombra", als racons de la biblioteca on ni els bibliotecaris miren o entre la desena i onzena pàgina dels resultats de Google.

La frase "quan trobis un bolet, inspecciona els voltants perquè normalment n'hi haurà més" també es pot extrapolar a l'àmbit del coneixement:

Normalment quan estem aprenent quelcom on no tenim gaire experiència, cada petita cosa que aprenem ens obre les portes per a coses més difícils. Per exemple: imaginem que hem après a operar amb potències. Llavors ja podem aprendre les arrels i a resoldre equacions de segon grau. A més a més, cada vegada que investiguem sobre un tema en concret, veiem que hi ha altres coses que hi estan relacionades. Això ens ensenya que, igual que un bolet porta a un altre, el coneixement porta a més coneixement. És per això que és impossible saber-ho tot.

Per acabar amb les correlacions, faltaria aclarir el paper dels protagonistes de la història. Jo simbolitzaria l'alumne, aquella persona que investiga i que vol aconseguir coneixement però que no sap massa com orientar-se en aquest "bosc" i necessita ajuda. El meu avi i el meu tiet simbolitzarien aquelles persones que t'ajuden a orientar-te i a saber on buscar i on no, com fer-ho i t'avisen dels perills. És a dir, els professors.

Al final de la història veiem que ja no depenc del meu avi per a poder anar a buscar bolets, que ja he après els diferents tipus que hi ha i on els puc trobar i que fins i tot sóc capaç de portar el meu germà al bosc per a ensenyar-li el mateix que el meu avi em va transmetre al seu moment.

Arran d'això, i sabent que a l'escola els professors tenen el mateix rol que el meu avi, podríem preguntar-nos si realment són necessaris. Podria ser eficient una educació autodidacta sense professors presencials?

La resposta és sí i no a la vegada tot i que depèn de com entenguem la figura del professor. Si l'entendem com algú que ajudarà als alumnes a resoldre els seus dubtes, orientar-los en el seu treball, donar-los eines per a aprendre per ells mateixos i per a saber destriar informació són imprescindibles. També són molt importants a l'hora de donar als alumnes una base de coneixement fiable, ja sigui donant-los fonts d'informació fiables o explicant-los els conceptes d'una manera participativa.

D'altra banda, són totalment prescindibles si l'únic que han de fer és posar-se a la pissarra i fer una d'aquelles classes-conferència on el professor es posa a dictar els apunts o es passa tota una hora parlant mentre els estudiants prenen apunts. Per a aprendre així ja existeixen webs meravelloses com "KhanAcademy" o alguns canals de Youtube on pots veure tantes vegades com vulguis els vídeos explicatius, estudiar a casa i estalviar-te d'anar 6 hores a l'institut com va fer Sofia Defauw ([SoDT]).

Tot i que sembli que aquest tipus de classes facilitin la feina als alumnes ja que només han de copiar el que dicta el professor o apuntar les coses més rellevants que diu, el cert és que són una completa pèrdua de temps. Tenir als alumnes copiant el que diu el professor és inútil ja que des de l'any 1931 existeixen les fotocopiadores. En comptes de fer aquest tipus de classes, el professor podria donar als alumnes fotocòpies del que dictarà i que els alumnes s'ho estudiessin i així es podria dedicar la classe a fer coses més útils com ara resoldre dubtes o proposar projectes. El mateix passa amb les classes on el professor es passa l'hora parlant. Seria molt més útil gravar la classe en vídeo, penjar-la al moodle o a Youtube i deixar que els alumnes ho miressin a casa o quan volguessin. D'aquesta manera, els que tenen un ritme més baix ho podrien repetir fins que ho entenguessin i la classe es podria dedicar a altres coses com les que he dit abans.

5- Conclusions

Vivim en una època on l'única cosa que no canvia és que tot està en constant evolució. La tecnologia, la ciència i fins i tot algunes tendències ideològiques de fa 50 anys són completament diferents a les que tenim ara. L'educació s'hauria de sumar a aquesta innovació i deixar enrere les velles tendències per a adaptar-se als nous temps però aquest canvi només és possible si qui governa aplica mesures en l'àmbit. Mesures reals, no promeses de canvi que mai arriben o, fins i tot, ens porten en direcció contrària. L'educació és un aspecte molt seriós ja que potser només afecta a una part de la població, però resulta que aquesta part és la totalitat del futur del país.

Sabem que la millor aposta és un ensenyament que no ens eduqui com robots sinó que ens prepari per a treballar conjuntament amb ells en un futur; una educació on cada alumne pugui triar la major part d'assignatures que vol fer; una escola basada en el que ens fa humans, que ens ensenyi a gestionar les nostres emocions i utilitzar-les com a combustible; un sistema que doni sentit a tots els continguts i el seu objectiu sigui la comprensió d'aquests, no la seva memorització; que aconseguixi que cada alumne sigui capaç de trobar bolets dins el bosc del coneixement i sobretot, una educació que aconseguixi que els estudiants siguin feliços mentre aprenuin.

Al llarg d'aquest treball hem vist algunes propostes per a aconseguir tot això. Al bloc inicial hem mostrat les demostracions, una eina molt poderosa per a ajudar als alumnes a comprendre millor les matemàtiques. Al segon bloc s'han proposat diverses millores com ara convertir els exàmens en reptes i fer-los amb apunts per a involucrar més les emocions o basar els cursos a partir de 3r d'ESO majoritàriament en optatives i afegir algunes assignatures com la intel·ligència emocional que ajudarien als estudiants a millorar tant el seu rendiment acadèmic com la seva vida personal. A més a més s'ha proposat vincular la literatura, la filosofia i la història per tal d'oferir als alumnes una visió més global de cada moment històric alhora que es comprenen millor el pensament i literatura d'aquella època. Finalment hem sospesat la possibilitat d'una educació sense professors, hem parlat del rol que aquests haurien de tenir i hem vist que haurien de ser una figura que ens guiés en el camí que nosaltres vulguem agafar no pas algú que ens força a seguir una ruta concreta.

Vull posar èmfasi en el fet que aquest sistema educatiu que proposo només funcionarà si l'alumne hi posa de la seva part. Totes les mesures per a fer les classes més actives, més de raonar i basades en projectes només són possibles si l'estudiant es compromet amb la seva educació i aprofita les hores que està a l'institut. Qui no vol treballar i no vol aprendre, no ho farà estigui com estigui muntat el sistema. Precisament per això hem de deixar als estudiants que sí que estan disposats a esforçar-se triar el que volen fer. Que qui fracassi no sigui perquè està estudiant quelcom que no li interessa sinó

perquè no hi posa l'esforç que hi ha de posar i exactament igual al revés, que qui tingui èxit sigui en els àmbits que ha triat i gràcies al seu esforç.

Per a acabar, voldria dir que els objectius que tenia aquest treball s'han acomplert ja que he après què són, per a què serveixen i com es fan les demostracions matemàtiques; he recollit l'opinió de la gent sobre l'educació i he aconseguit proposar algunes millores.

L'últim objectiu, que consistia en divulgar el que he après, s'ha basat sobretot en l'animació que he preparat. Aquesta animació està arribant a la gent i poc a poc es va compartint més i més. Tot i això, l'objectiu de divulgació no estarà complert fins que aquest treball s'hagi exposat en públic, s'hagi avaluat i sigui possible compartir-lo per Internet.

6- Agraïments

Moltes gràcies a tota la gent que m'ha ajudat de la manera que sigui en aquest treball. Especialment als meus tutors de l'Institut Pla de l'Estany: en Jordi Lagares i en Josep Palmada, que m'han anat donant idees durant tot el treball alhora que m'aconsellaven com fer-lo. Sense vosaltres dos no hagués estat possible escriure més de 60 pàgines que tinguessin sentit. Tampoc hagués pogut fer el treball que acaben de llegir sense l'ajuda de la UAB, tant en el seguiment per part d'Armengol Gasull (que m'ha proporcionat molt material del qual partir i m'ha aclarit alguns dubtes que tenia respecte temes matemàtics) com en les seves estades d'estiu, on he après moltes coses, la majoria de les quals estan en les pàgines que acabes de llegir.

Moltes gràcies també a la meva família, sobretot als meus pares Josep i Modesta amb els quals he mantingut llargues converses sobre l'educació i sobre com millorar-la a més a més d'ajudar-me en alguns aspectes del redactat. Gràcies també als meus avis Jordi i Maria que m'han deixat passar uns dies a casa seva perquè pogués dedicar-me a escriure aquest treball sense haver-me de preocupar de fer res més. Gràcies a tu també, Jordi, que, tot i voler jugar, m'has deixat l'ordinador perquè pogués escriure.

Gràcies Melanie que, sense ser oficialment tutora del treball, m'has escrit un pròleg meravellós i has llegit i opinat sobre la totalitat de l'obra. Simplement indispensable per a fer-lo cada vegada millor.

Gràcies a l'Eduardo Sáenz de Cabezón per concedir-me una entrevista i permetre'm parlar amb ell sobre l'educació i les matemàtiques.

Gràcies a vosaltres Genís, Doll, Iván, Maria, Martina, David i Marc per discutir el tema amb mi i per llegir i criticar constructivament cada text i vídeo que us he enviat.

Gràcies a tothom que ha contestat l'enquesta. Sense vosaltres el treball no hagués estat possible i gràcies a tu també, Joana, que m'has ajudat a què les enquestes i el vídeo arribin a la gent.

Finalment, gràcies a tu, lector/a, per haver dedicat el teu temps a llegir el meu treball.

7- Bibliografia i Webgrafia

Llibres:

[AlNe]

Alsina, Claudi. & Nelsen, Roger. *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*. #Dolciani mathematical expositions#. USA: Mathematical Association of America, 2010.

[OsHY]

Ostby, Hilde i Ostby, Ylva. *El libro de la memoria: buceando en busca de nuestros recuerdos*. Madrid: Ariel, 2019.

PDFs:

[DavB]

Davey, Brian. *Proofs by Induction*. Australian Mathematical Sciences Institute. (2011). Consultat el 15/10/18 a https://www.amsi.org.au/teacher_modules/pdfs/Maths_delivers/Induction5.pdf

[DGMN]

Doménech, Rafael; García, Juan Ramón; Montañez, Miriam; Neut, Alejandro. *Cuan vulnerable es el empleo en España a la revolución digital?*. (2018). BBVA. Consultat el 20/08/19 a <https://www.bbvaesearch.com/wp-content/uploads/2018/03/Cuan-vulnerable-es-el-empleo-en-Espana-a-la-revolucion-digital.pdf>

[GasA]

Gasull, Armengol. *Gemmes matemàtiques*. (2019). Universitat Autònoma de Barcelona. Consultat el 20/03/19 a https://ddd.uab.cat/pub/matmat/matmat_a2019/matmat_a2019a2.pdf

[MarR]

Martos, R (no figura el nom complert). *Efectos de la exposición a estimulación aversiva incontrolable: indefensión aprendida*. Universidad de Jaén. Consultat el 20/07/19 a <http://www4.ujaen.es/~rmartos/IA.PD>

[MoCA]

Morales, Carlos Augusto. *Los métodos de demostración en matemática*. (2008). Universidad de San Carlos de Guatemala. Consultat el 16/11/18 a http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/07/07_1914.pdf

[PP11]

Partido Popular. *Programa electoral Partido Popular: Más sociedad, mejor gobierno*. (2011). Consultat el 15/09/19 a <http://www.pp.es/sites/default/files/documentos/5751-20111101123811.pdf>

[PP15]

Partido Popular. *Seguir avanzando: programa electoral para las elecciones generales de 2015*. (2015). Consultat el 15/09/19 a <http://www.pp.es/sites/default/files/documentos/programa2015.pdf>

[PSOE]

Partido Socialista Obrero Español *Programa electoral PSOE/<3: Elecciones generales 2019*. (2019). Consultat el 15/09/19 a <https://www.psoe.es/media-content/2019/04/PSOE-programa-electoral-elecciones-generales-28-de-abril-de-2019.pdf>

Webs

[ACCI]

Álvarez, Pilar, Catalán, Nacho, Clemente, Yolanda. “Diez gráficos que explican por qué hace falta un pacto educativo.” *El País* (15/01/2018). Consultat el 17/09/19 a https://elpais.com/elpais/2018/01/12/media/1515775390_532183.html

[WoDR]

D.D.A.A. *World development report 2016 (2016)*. Consultat el 18/09/19 a <https://www.worldbank.org/en/publication/wdr2016>

Vídeos

[AltJ]

Altozano, Jaime. *Mi horrible experiencia en el sistema educativo*. (2018). JaimeAltozano. Consultat el 05/08/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=ny61lc2xiZk>

[BIAT]

Blanco, Alfonso. *Dejar de estudiar y empezar a aprender*. (2017). TEDxTalks. Consultat el 20/7/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=zLlzBEeKN4U>

[NixC]

Nixon, Charisse. *Learned helplessness*. (2010). Ophelia Project. Consultat el 5/8/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=p6TONVkJ3eI>

[COT1]

COTEC. *#MiEmpleoMiFuturo: un documental sobre robots, economía, clase media... y el fin del mundo* (2019). COTEC.

Consultat el 06/08/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=htAnVeMtrr8&t=27s>

[COT2]

COTEC. *#MiEmpleoMiFuturo2: un documental sobre robots, economía, clase media... y el fin del mundo* (2019). COTEC.

Consultat el 06/08/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=-z5z8aGRSQ0>

[CrJL]

Crespo, José Luís. *¿Por qué el sistema educativo no funciona?*. (2017). QuantumFracture.

Consultat el 5/08/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=iEb9L2CMjr0&t=332s>

[GaJT]

Garbulsky, Juli. *Zombies en la escuela*. (2017). TEDxTalks.

Consultat el 25/07/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=g6zBmBUOMhY>

[GoLT]

Gortazar, Lucas. *¿Aprobar o aprender?*. (2018). TEDxTalks.

Consultat el 20/07/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=d8smMhh8DRU>

[LaJo]

Lagares, Jordi. *Matemàtiques - 4t ESO - 1r BAT - 2n BAT CS - 2019/2020*.

Consultat el 15/09/2019 a <http://www.xtec.cat/~jlagares/mates/index.htm>

[RoGT]

Rodríguez, Gabriel. *La inteligencia emocional en el trabajo*. (2019). TEDxTalks.

Consultat el 01/09/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=LoHw4BkmROY>

[SET1]

Sáenz, Eduardo. *Las matemáticas son para siempre*. (2014). TEDxTalks.

Consultat el 2/05/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=jej8qlzIAGw&t=447s>

[SoDT]

Defauw, Sophie. *Crece sin escuela*. (2017). TEDxTalks.

Consultat el 10/05/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=xQKoHC70Fnw>

[EAPr]

Prince, E.A. *I sued the school system!!!*. (2016). Prince EA.

Consultat el 02/04/19 a <https://www.youtube.com/watch?v=dqTTojTija8>

8- Annex: animació i entrevista

En aquest annex hi trobem l'animació feta amb el programa lliure "OpenToonz" que ha servit per a acomplir l'objectiu de divulgació d'aquest treball i també hi trobem l'entrevista que em va concedir Eduardo Sáenz de Cabezón.

[A1] Animació:

Codi QR a l'animació:



Link a l'animació: https://www.youtube.com/watch?v=ce61fb_tBoY&feature=youtu.be

Música: Instrumental Core. *Hans Zimmer-Time-Instrumental Core remix.* (2012).

Link a la música: <https://www.youtube.com/watch?v=BJ9AJ7iwlg>

[A2] Entrevista a Eduardo Sáenz de Cabezón (traduïda del castellà):

1- Creus que el sistema educatiu actual afavoreix que aprovar sigui més important que aprendre?

Segurament, i per molta gent sí que funciona així. La cosa és que el sistema educatiu està compost per molts components. Hi ha els components interns que serien els professors, les escoles, el sistema d'avaluació o la pròpia llei i després hi ha els components externs que és què espera la família del propi sistema, la personalitat de cada alumne o el partit polític que mana en aquell moment ja que moltes vegades l'educació es fa servir com una eina política. Si ens restringim únicament als components interns sí que es valora molt més aprovar que aprendre realment. El que passa és que el nostre sistema el que fa és identificar l'èxit escolar en aprovar i és aquí quan venen els problemes. Pensem que a un alumne li va bé a l'escola segons les notes que treu i deixem de banda altres factors com si està aprenent, si és feliç a classe, si el que aprèn li serà útil o fins i tot si el que aprèn el farà millor persona. El que crec jo és que l'educació està orientada massa cap al futur i noté en compte el present de l'alumne. De fet, crec que les etapes de primària i secundària s'haurien d'orientar més cap al desenvolupament personal, social i cultural i no tant cap a preparació professional. Si aconseguim fer classes i exàmens que aconseguixin involucrar els dos vessants, estarem ajuntant els objectius d'aprovar i aprendre, que és el que s'ha d'intentar.

2- Creus que aquest enfocament de l'educació provoca el sentiment tan típic de desconcert o fins i tot d'odi cap a les mates? Com es podria solucionar?

En certa manera sí que el sistema provoca aquest sentiment. Tot el que s'ha d'ensenyar als alumnes està molt fixat des del govern però el que haurien de fer els professors és intentar donar sentit al que ensenyen i que els alumnes sàpiguen per què estan estudiant allò. Potser no tindrà una utilitat aparent en la seva vida, però ajudarà a què facin servir el cap i el vagin entrenant. De fet, les persones només ens interessem pel que trobem útil. Per tant, si donem sentit al que ensenyem molts més alumnes s'interessaran i reduïrem aquest desconcert cap a les mates. Al cap i a la fi, és molt millor que els alumnes sàpiguen que ho estan estudiant perquè així aprenen a raonar que no pas que pensin que ho estudien perquè sí.

3- Creus que les mates es podrien ensenyar d'una manera no tan passiva i que els alumnes sortissin igualment preparats per a les PAU?

Si bé és cert que el temari està molt fixat i les PAU són unes proves que en certa manera "amenacen" als alumnes i als professors, crec que hi ha alguns temes que es podrien ensenyar de manera més activa o amb més profunditat per aconseguir-ne una major comprensió. Potser, si es reduís el temari els professors podríem dedicar més estona als temes que potser necessiten una mica més d'aprofundiment o demostració, la qual cosa potser solucionaria la frustració d'alguns estudiants i incrementaria l'interès d'altres. Al cap i a la fi el sistema està muntat així i els professors no hi podem

fer massa res tot i que n'hi ha alguns que han aconseguit ensenyar activament. El problema està en què la majoria de professors no estan en contacte entre ells i, per tant, no comparteixen recursos ni maneres d'ensenyar. Podria haver-hi un professor que hagués dissenyat un mètode d'aprenentatge actiu per un cert tema i un altre que hagués fet el mateix amb un altre tema diferent. El millor pels alumnes seria que aquests professors ho poguessin compartir entre ells però desgraciadament això no sol passar.

4- Per tu quines qualitats ha de tenir un bon professor de mates?

Penso que ha de tenir 3 habilitats: ha de tenir un molt bon coneixement de la matèria i de com evoluciona, una gran comprensió del que explica i una excel·lent capacitat de comunicació. La gran majoria de professors tenen les 2 primeres ja que han estudiat la matèria amb molta profunditat i saben el que estan explicant, però sovint no saben comunicar correctament. Aquesta és una habilitat que no s'ensenyava gaire tot i ser de les més importants ja que una mala comunicació pot afectar molt negativament l'aprenentatge dels alumnes.

5- Moltes vegades l'assignatura de mates provoca indefensió adquirida als alumnes i ja es rendeixen en intentar comprendre-les. Creus que podríem evitar aquesta situació?

Crec que aquest fenomen es dona i hauríem d'intentar evitar-lo. En la majoria de casos la indefensió s'adquireix quan s'intenta alguna cosa repetidament i no surt, ja sigui perquè no s'ha entès o perquè ja de per si no hi ha interès. Per tant, el que s'hauria de fer en el primer cas és ensenyar amb més profunditat ja que la comprensió dels alumnes seria major i, com més comprensió, menys probabilitats de desenvolupar aquesta indefensió (o de solucionar-la si és que ja hi és). També és cert que algunes persones que estan en aquesta situació no es preocuparan mai de solucionar-la perquè no els interessin les mates i la majoria dels alumnes no dedicarien el seu poc temps lliure en estudiar per millorar la seva comprensió en una cosa que no els interessa.

6- Que n'opines de la gent curiosa? Creus que el sistema educatiu està matant la curiositat?

Crec que la gent curiosa és la que fa que el món avanci. La curiositat ens fa preguntar-nos coses i seguir aprenent, cosa que ens fa millorar. Desgraciadament, el sistema en què estem poc a poc va reduint la curiositat dels alumnes ja que cada cop tenen més feina, que desemboca en més estrès i fa que al final del dia els alumnes estiguin massa cansats i no tinguin ganes d'investigar més coses. Moltes vegades hi ha alumnes que fan preguntes simplement per curiositat. A vegades es poden respondre, però altres no es pot satisfer la curiositat del tot perquè fer-ho porta massa temps i, com he comentat anteriorment, el temari és molt extens. De fet, de petits les persones preguntem molt i normalment obtenim respostes, però arriba un moment que tantes preguntes poden arribar a ser pesades i qui ens hauria de donar respostes es limita a un simple "perquè sí".

7- Què et produeix curiositat?

Gairebé tot em produeix curiositat tot i que la cosa que trobo més interessant és veure com professionals d'àmbits aparentment inconnexos treballen i aconsegueixen grans resultats. Aquestes col·laboracions entre àmbits diferents són les que aporten riquesa al món.

8- Per què vas decidir estudiar mates i dedicar-te a la divulgació?

En realitat mai vaig tenir una vocació específica per a les mates. A l'institut és cert que m'agradaven, però com em podia agradar la literatura o la biologia. Jo de jove volia ser programador i la única carrera on hi havia alguna assignatura era la de matemàtiques, concretament al cinquè any, així que em vaig apuntar allà. Al primer curs, una professora que es deia Pili ens va explicar el "teorema d'isomorfia de Noether". Quan el vaig aconseguir entendre, vaig cobrar consciència de les maravelles que es poden arribar a fer només fent servir el pensament abstracte i la generalització. Finalment, he acabat fent de professor, divulgador i també em dedico a l'àlgebra computacional.