

RELOTGE ANALEMÀTIC AUTORIENTABLE



DISSENY, CONSTRUCCIÓ I IMPLEMENTACIÓ

Treball de Recerca
Garcia Herranz, Àlex
IES Pere Alsius
Tutora: Àngels Picart
Banyoles, 10 d'octubre de 2016

“Perdona, tens hora?”

Anònim

Aquest treball no hauria estat possible sense l'ajut d'un seguit de persones. Per aquest motiu, dono les gràcies:

A la meva família, i especialment al meu pare, que m'ha ajudat en tot el que ha pogut.

A la meva tutora, Àngels Picart, per preocupar-se per mi i per guiar-me.

Al professor Gerard Gómez, per solucionar-me els dubtes matemàtics.

A Juan Moya i Rodrigo Bértudez, per ajudar-me amb la càmera Raspberry Pi.

I per últim, però no menys important, a Astrobanyoles.

ÍNDEX

1. Introducció.....	5
2. Història.....	7
3. Tipus de rellotges.....	13
3.1 Equatorial.....	13
3.2 HORIZONTAL.....	13
3.3 Vertical.....	14
3.4 De pastor.....	15
3.5 Bifilar.....	16
3.6 Anular.....	16
3.7 Analemàtic.....	17
4. Models Terra-Sol.....	18
5. Observació de l'analema: <i>timelapse</i> amb la càmera Raspberry Pi.....	20
6. Disseny del rellotge analemàtic.....	25
6.1 Coordenades.....	25
6.2 Determinació de la meridiana.....	29
6.3 Determinació de la latitud local.....	29
6.4 El·lipse.....	31
6.5 Marques horàries.....	32
6.6 Correccions de temps.....	34
7. Construcció del rellotge analemàtic.....	38
7.1 Primers passos.....	38
7.2 Càlculs del rellotge horitzontal.....	39
7.3 Material i eines.....	40
7.4 Taules de valors.....	41
7.5 Procés de construcció.....	43
8. Conclusions i retrospecció.....	45
Glossari.....	47
Bibliografia i webgrafia.....	49
Índex d'imatges.....	51

INTRODUCCIÓ

El temps és una de les magnituds físiques que més ha interessat i fascinat l'ésser humà. Al llarg de la seva història, ha intentat explicar el pas del temps amb l'ajut de forces sobrenaturals, déus i deeses. També ha intentat controlar-lo, fracassant en tots els seus intents. Fins i tot avui, l'ésser humà, que ha fet que la ciència i la tècnica ho dominin tot, és víctima de l'implacable pas del temps. Cada dia que passa és un dia que no tornarà. L'únic que ha aconseguit ha estat observar i mesurar el seu pas, l'ha observat fixant-se en el Sol, en la caiguda de sorra o aigua, o en els nuclis d'àtoms. Ha creat tot tipus de rellotges, cada cop més complicats: de sol, de sorra, mecànics, digitals, atòmics...

Estem fascinats pel pas del temps i aquests aparells que hem creat per observar i mesurar el temps, des de petits ens atreuen; per això, el treball de recerca tractarà sobre un d'ells, un rellotge de sol que s'anomena rellotge analemàtic.

Per què aquest tipus específic de rellotge i no un altre? Doncs perquè pensem que és molt interessant el funcionament de tots els rellotges solars (estudiar el Sol per saber l'hora) i, dintre d'aquest grup de rellotges, l'analemàtic és el més original i el que ocupa menys espai.

Un rellotge analemàtic és un tipus de rellotge solar on el gnòmon (l'element que provoca l'ombra que senyala l'hora) és vertical i mòbil, i pot arribar a ser el propi observador. És molt present en museus de ciències i jardins.

Per això l'objectiu final i principal d'aquest treball és construir un rellotge analemàtic, a part d'estudiar-ne el seu funcionament.

Per això el treball constarà principalment d'una part teòrica on s'explicarà la història de la gnomònica (ciència que estudia els rellotges de Sol), els diferents tipus de rellotges, un petit estudi solar de la nostra població, Banyoles. I una part més pràctica, que consistirà en la construcció d'un rellotge solar analemàtic, després d'haver-ne fet els càlculs.

Per fer aquest treball, sobretot es buscarà la informació en llibres i Internet, no seran

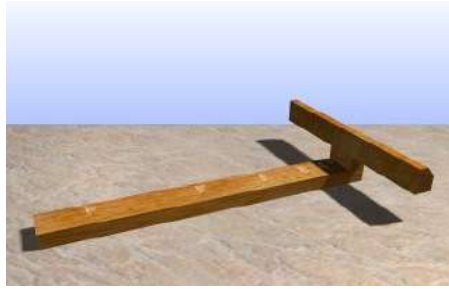
gaire necessàries les entrevistes. Segurament s'anirà a provar un rellotge d'aquest tipus (n'hi ha un a Sabadell i tres a Barcelona). S'ha de tenir en compte, que al ser un treball principalment matemàtic, s'usa un mètode axiomàtico-deductiu, és a dir, fent servir uns axiomes inicials i les regles matemàtiques, s'arriba als resultats; per tant, no seran necessaris gaires experiments.

Volem que el rellotge que es construeixi es pugui fer servir sovint, per tant ha d'estar a Banyoles, i ens agradaria que estigués en el pati de l'institut, però si no pot ser, ja es buscarà una altra solució.

2.HISTÒRIA DEL RELLOTGES SOLARS

Una de les primeres activitats intel·lectuals que va fer l'ésser humà va ser la descoberta del temps. El necessitava per planificar les seves caceres o recol·lectes. Necessitava saber si podia anar més lluny a caçar abans que es fes fosc... Per això es va fixar en les ombres que feien els objectes, i va veure que les ombres començaven essent molt llargues al matí, s'escurçaven cap al migdia i tornaven a allargar-se cap al vespre. Ara ja sabia que quan les ombres eren curtes encara li quedava la meitat del dia i podia allargar les seves activitats de subsistència. Però cap al Neolític, quan l'ésser humà es va fer sedentari i va començar a cultivar i a fer de ramader, la mera observació de les ombres no li servia, pel que va clavar una estaca prop de casa i va veure que dia rere dia quan l'ombra era més curta formava un reguitzell de punt alineats (la meridiana). Ara ja sabia el moment de la meitat del dia. També es va fixar que en l'època freda les ombres eren més llargues, i quan el clima era més bo, eren més curtes. Aquest fet va propiciar la mesura de l'any i les estacions. Gràcies a aquest invent l'ésser humà va poder preveure quan arribaria la temporada bona per plantar, quan vindria el fred, les crescudes dels rius... Les cultures que es van dedicar a mesurar el temps van ser les que van avançar més ràpidament, com va passar amb els babilonis.

Els egipcis van ser uns dels primers pobles en utilitzar l'astronomia per als seus fins: gràcies a ella sabien les crescudes del Nil, quan convenia plantar o segar... Per això, no és estrany que sigui seu el primer rellotge solar del que en tenim restes. Aquest rellotge, de l'època de Tutmosi III (1500 aC), tenia forma de T, on el segment petit de fusta s'orientava en direcció nord-sud i el gran d'est a oest. Així, el llistó petit anava formant una ombra sobre el llistó gros, on hi havia l'escala horària. Però, com es pot deduir, cada dia les hores tenien diferent llargada, ja que no està del tot clar si el llistó curt es podia moure. Cap al 750 aC, es creu que hi havia un rellotge solar al palau de Judà, però d'aquest quadrant, anomenat Quadrant d'Acáz, només en conservem cites bíbliques (*Isaïes 38:7-9*).



Imatge 2.1: Rellotge egipci. Font: [Olimpiadas Nacionales de Contenidos Educativos en Internet](#)

Els grecs, cap a l'època de Ptolomeu (s. III aC), van construir uns rellotges de marbre o altres roques calcàries d'uns 30 centímetres amb una concavitat al centre de forma hemisfèrica. En aquest hemisferi s'hi feien 12 divisions en forma de radis convergents en un pol, on es posa una barreta inclinada en funció de la latitud local. Aquests rellotges, anomenats *scaphe*, van ser creats i perfeccionats per Anaximandre de Milet. Un altre gran rellotge solar grec va ser la el de la Torre dels Vents d'Atenes, on hi havia un rellotge vertical a cada cara de la seva planta octogonal. És normal que els grecs fossin grans gnomonisticistes, ja que també van ser ells els que van observar l'obliquïtat de l'eclíptica de l'òrbita terrestre... No és pas estrany; aquests antics grecs eren grans matemàtics i astrònoms, mireu si no a Pitàgores, Euclides, Aristarc, Hiparc, Arquímedes...



Imatge 2.2: Scaphe grec. Font: [Liverpool Museums](#)

Els romans van aprofitar molt el coneixement dels grecs, cosa que va fer que durant més de noranta anys Roma es regís per un rellotge grec, però aquest rellotge no marcava bé les hores per la diferència de latitud. Tot i que els romans eren molt partidaris de fer servir rellotges de sorra o aigua, els romans van fer grans avenços en gnomònica: Marc Vitruvi Polió ja va definir què era l'analema (d'aquí ve el terme rellotge analemàtic), feien servir rellotges solars portàtils en les seves batalles, van fer grans rellotges amb obeliscs...

Quan va caure l'Imperi Romà, molts d'aquests avenços en astronomia i gnomònica es van perdre a l'Europa occidental. A sobre, no hi havia molta necessitat de fer rellotges solars molt precisos, ja que la vida es regia per les hores canòniques. Per això, els únics que durant l'Edat Mitjana van avançar en aquestes disciplines van ser els musulmans i, després de l'ocupació musulmana de la Península, l'escola de Toledo de Alfons X el savi. Van ser els musulmans els que van recollir tot el coneixement greco-romà, i el van fer servir per millorar els astrolabis. També un musulmà, anomenat Al-Battani, va calcular l'any solar i va ser el primer en fer servir el sinus d'un angle. Anys després, a Egipte, es van crear uns rellotges solars que no tenien estilet o gnòmon, sinó que tenien un foradet per on entrava la llum del sol i marcava les hores a l'interior. Aquest tipus de rellotges van ser molt utilitzats, i fins i tot edificis sencers feien aquesta funció. Un àrab nascut a Còrdoba, al segle XI, va calcular la declinació solar i va anticipar-se a Copèrnic col·locant el Sol al mig i els planetes al seu voltant. Tots aquests coneixements van ser recollits per Alfons X, que els van traduir. Gràcies a aquesta tasca, tots aquests coneixements van poder arribar a Europa.



Imatge 2.3: Rellotge medieval àrab. Font: [wikimedia commons](#)

Durant el Renaixement, es popularitza el traçat de grans meridians per calcular bé l'any i també saber quan era exactament el migdia. Per això, catedrals i esglésies van ser utilitzades amb aquesta funció. Per exemple, la Catedral de Florència (Duomo) va ser utilitzada com a gnòmon foradat. Un altre avenç d'aquest període va ser la construcció de rellotges on l'estilet ja no era perpendicular al pla, sinó que mantenia una inclinació segons la latitud local. També en aquest període es van utilitzar i millorar els rellotges que funcionaven segons l'altura del Sol, com el de pastor o el d'anell. El Renaixement va ser un gran període per als rellotges de Sol, ja que es va rescatar i millorar, gràcies als avenços astronòmics, tot el que s'havia estudiat a l'Antiguitat. S'ha de dir que en aquesta època ja existien alguns rellotges mecànics, però no eren gaire precisos i necessitaven posar-se a hora gairebé cada dia, cosa que va fer que el traçat de meridians es popularitzés, com ja s'ha dit anteriorment.



Imatge 2.4: Meridiana de l'església de San Nicolò de Catania. Font: [Mateturismo](#)

Els segles XVII i XVIII són el període daurat de la gnomònica. En aquesta època es creen els rellotges azimuthals, rellotges portàtils en forma de díptic, també es creen rellotges solars que marquen les hores en diferents el·lipses i cercles, donant així el tret de sortida als rellotges analemàtics. Alguns anys després, un anglès descobreix que representant l'equació del temps (diferència entre temps solar mitjà i temps solar aparent) es forma una

corba en forma de vuit anomenat analema. Després d'aquest període els rellotges de sol entren en decadència degut a la popularització dels rellotges mecànics que ja eren prou precisos i assequibles per a gran part de la població.

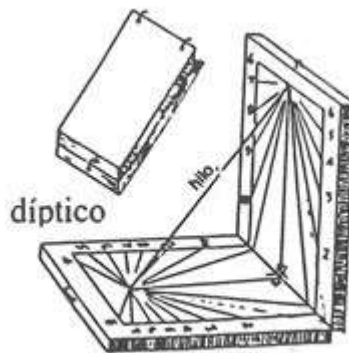


Figura 17

Imatge 2.5: Rellotge solar en forma de díptic. Font: www.relojesdesol.info

Després d'alguns segles en l'oblit, els rellotges solars i la gnomònica es tornen a popularitzar al segle XX gràcies a la geometria analítica, que els fa més precisos. Tot i així, l'ús dels rellotges solars actualment no deixa de ser anecdòtic i residual, centrat sobretot en l'ornamentació.



Imatge 2.6: Rellotge solar actual de precisió. Font: eltamiz.com

I per què el dia té 24 hores de 60 minuts?

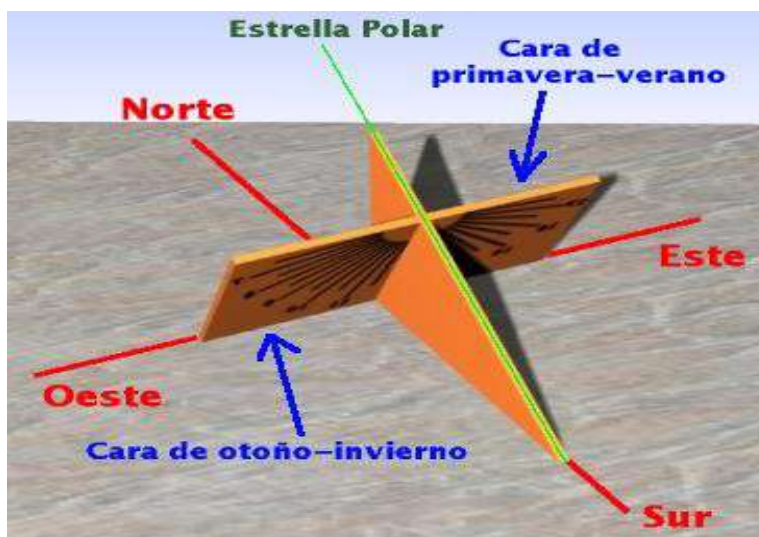
La divisió del dia en 24 hores iguals, segurament ve de la divisió sexagesimal de la circumferència. Per exemple, els egipcis dividien el dia complet en dotze parts per al dia i dotze més per la nit. Ells, però, també li donaven una explicació religiosa. Però, com es pot deduir lògicament, aquests períodes augmentaven i disminuïen al llarg de l'any, a l'estiu les "hores diürnes" eren més llargues que les nocturnes i a l'hivern a l'inrevés. Aquest tipus de divisions variables depenent de l'any també les van utilitzar els sumeris, mesopotamis, hebreus... Aquests sistemes feien que la interpretació fos molt complicada pel poble; en realitat només l'entenien els sacerdots. Tot i les seves complicacions, aquests sistemes van durar fins els segles XVIII i XIX en alguns llocs d'Europa i Àsia. Tornant a l'Antiguitat, el poble jueu va dividir el dia i la nit en 8 parts i, més tard els cristians en 7 parts, que es corresponien amb les hores canòniques (matines, laudes, prima, tèrcia, sexta, nona, vespres i completes). Això va durar fins que es va tornar a dividir el dia en 24 parts quan es va acabar de descobrir el nostre sistema solar i es va prendre com a començament del dia el meridià local. Això feia que cada poble tingués la seva hora local; per exemple, entre dos pobles veïns hi havia diferències de quatre minuts. Això es va acabar amb l'arribada del tren, l'avió i altres mitjans de transport ràpids, ja que es necessitava unificar l'hora per poder crear horaris rutinaris. Per solucionar el problema es va dividir la Terra en 24 parts de quinze graus cada una i es va establir la longitud zero en el meridià de Greenwich.

3. TIPUS DE RELLOTGES DE SOL

Actualment existeixen molts tipus de rellotges solars, alguns que encara ara es fan servir i d'altres que fa segles que van caure en desús, però gairebé tots es basen o són variacions dels següents:

3.1 EQUATORIAL

Aquest tipus de rellotge de Sol és el més senzill i en el que es basen els altres rellotges de Sol. Consta d'un gnòmon que fa amb l'horitzó (el terra) un angle d'igual valor que la latitud, per tant, és paral·lel a l'eix terrestre, i un pla o semicercle paral·lel a l'equador, per tant, perpendicular al gnòmon. Les marques horàries estan repartides al voltant del pla o semicercle separades cada 15°. Com es pot veure, aquests rellotges representen la posició de la Terra respecte del Sol. A l'hemisferi nord el gnòmon apunta cap al Nord; i a l'hemisferi sud, el Sud.

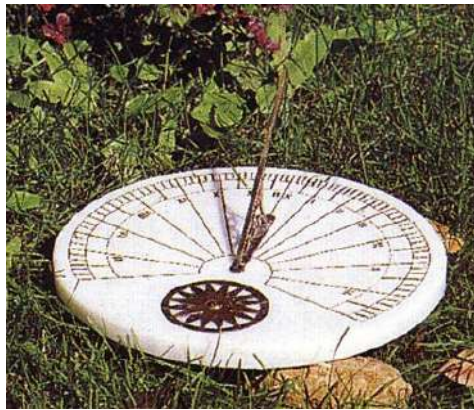


Imatge 3.1: Rellotge equatorial. Font: [Astrosurf](#)

3.2 HORIZONTA

Aquest rellotges no són res més que la projecció gnomònica del disc horari d'un rellotge equatorial al pla horitzontal. Per tant, el gnòmon o l'estilet seguirà essent paral·lel a l'eix

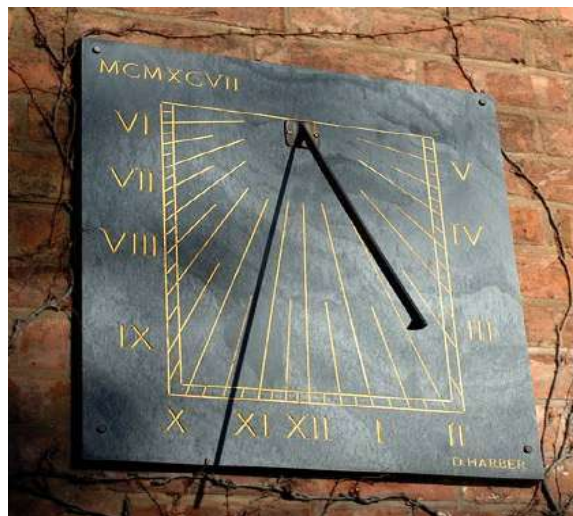
terrestre i orientat cap al nord. Són molt utilitzats en parcs i jardins.



Imatge 3.2: Rellotge horitzontal. Font: [Estecha, Artesanía de Valderrobles.](#)

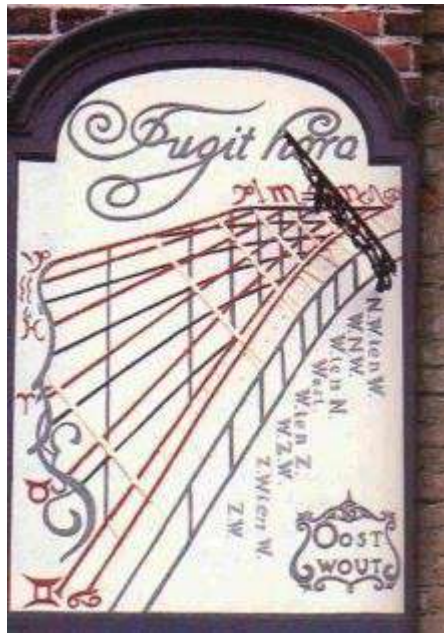
3.3 VERTICAL

Els rellotges de Sol verticals són la projecció gnomònica dels rellotges equatorials sobre una paret o superfície perpendicular a l'horitzó encarada al Sud. D'aquesta manera, l'estilet o gnòmon, que està en direcció nord-sud, forma amb la paret un angle igual a la colatitud (90° -latitud). Són molt presents en masies i esglésies.



Imatge 3.3: Rellotge vertical. Font: [David Harber, Garden Art.](#)

Si la paret o quadrant no està ben bé orientada cap al sud, s'anomena **rellotge vertical declinat**, on les línies horàries ja no són simètriques respecte el migdia ni l'estilet es col·loca igual.



Imatge 3.4: Rellotge vertical declinat. Font: relojesdesol.wordpress.com

3.4 DE PASTOR

Va ser un dels primers rellotges de Sol portàtil, i eren usats pels pastors per saber més o menys l'hora que era quan estaven a la muntanya amb els animals. Es basen en l'altura del Sol respecte l'horitzó, a diferència dels altres rellotges anteriors, que són azimutals. Aquest tipus de rellotge és format per un cilindre dividit verticalment per unes rectes amb les diferents dates, que són creuades per unes corbes que són les hores. També tenen un tap giratori amb un gnòmon que sobresurt. Per fer-lo servir s'ha de situar el gnòmon a la data correcta i moure tot el cilindre fins que l'ombra caigui ben recta.



Imatge 3.5: Rellotge de pastor. Font: tienda-elregaloideal.es

3.5 BIFILAR

Aquest rellotge, dissenyat pel matemàtic alemany Hugo Michnik al 1922, és un rellotge horitzontal en què l'hora és marcada per la intersecció de les ombres que formen dues catenàries o fils creuades i a diferent altura. El problema que té aquest rellotge és la dificultat per llegir l'hora.



Imatge 3.6: Rellotge bifilar. Font: pròpia, feta a Barcelona

3.6 ANULAR

És un rellotge d'altura portatil amb forma de cercle on a l'exterior hi ha l'escala de dates i a l'interior les hores. També consta d'una part central mòbil amb un orifici. Per llegir l'hora solar local s'ha de situar l'orifici a la data corresponent i dirigir l'orifici cap al Sol.



*Imatge 3.7: Rellotge anular.
Font: picoodle.com*

3.7 ANALEMÀTIC

Relotge horitzontal amb gnòmon mòbil (acostuma a ser una persona) que es va desplaçant per l'analema segons la data per tal de corregir els avanços i els retards deguts a l'excentricitat i l'obliqüitat de l'òrbita terrestre.



Imatge 3.8: Relotge analemàtic. Font: pròpia, feta a Barcelona

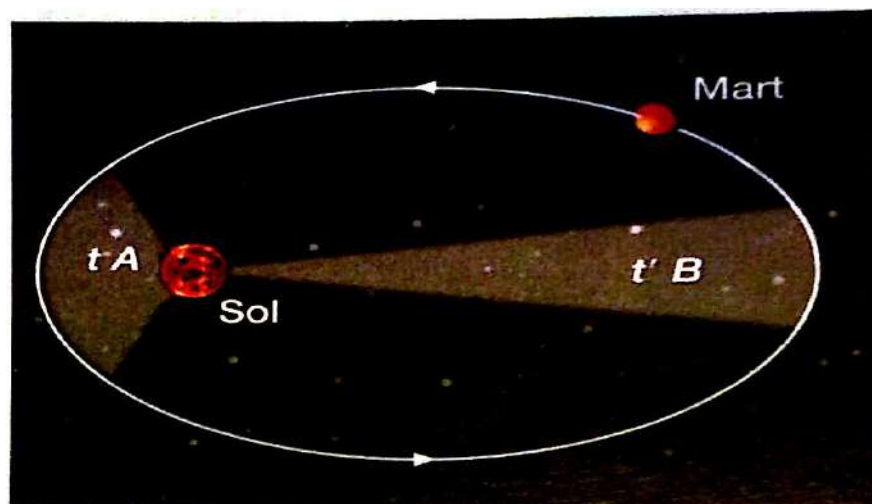
4. MODELS TERRA-SOL

Si hom observa el cel qualsevol nit o dia, es pot entendre que antigament es pensés que la Terra fos el centre de l'univers i que els astres gressin al seu voltant. Aquesta idea s'anomenava **geocentrisme** i actualment se sap que és falsa, però va ser creguda durant molts segles, tot i que per explicar els moviments dels planetes s'afegien altres magnituds i moviments inexistents, com el gir retrògrade. Tot i que ja en l'època romana va haver-hi alguns pensadors que no estaven d'acord amb el geocentrisme, no va ser fins al segle XVII, quan Nicolau Copèrnic publica les seves noves teories anomenades **heliocentrisme**, que s'explica que és la Terra la que gira al voltant del Sol i no al revés. Johannes Kepler, il·luminat per les descobertes de Copèrnic, Galileu i Brahe, formula les seves 3 lleis, que regeixen els moviments dels planetes:

-**Primera llei.** Els planetes giren en òrbites el·líptiques en les quals el Sol ocupa un dels focus.

-**Segona llei.** El segment imaginari que uneix un planeta amb el Sol (vector posició del planeta respecte del sistema de referència solar) escombra àrees iguals en temps iguals.

-**Tercera llei.** El quadrat del període del moviment al voltant del Sol de qualsevol planeta és directament proporcional al cub de la distància mitjana al Sol.



Imatge 4.1: Representació de la tercera llei de Kepler. Font: FÍSICA 2n BATXILLERAT, McGrawHill

En el cas de la Terra, l'excentricitat és molt petita, l'òrbita és gairebé circular.

El periheli terrestre, el punt de l'òrbita on el planeta està més a prop del Sol, és el 3 de gener, quan la Terra està a 147.100.000 km del Sol. En canvi, l'afeli, el punt més allunyat del Sol, correspon al 4 de juliol, quan la Terra està a 152.100.000 km. La distància mitjana és de 149.600.000 km, que correspon al semieix major de l'el·lipse. Així mateix, amb aquestes dades, es pot calcular quant és la distància focal, ja que correspon a la diferència entre l'afeli i el periheli. Alhora, també es pot calcular l'excentricitat de l'òrbita, sabent que aquest valor correspon al quocient entre la distància focal i el semieix major. Així doncs, aquesta és de 0,0167, tot i que s'ha de tenir en compte que l'excentricitat varia al llarg del temps degut a l'atracció de la resta de planetes del Sistema Solar.

En definitiva, d'aquestes lleis es pot extreure que els planetes descriuen òrbites el·líptiques, que no van a velocitat constant i que l'òrbita no està al mateix pla de l'equador.

Això crea diversos problemes en la definició de dia, ja que tradicionalment s'ha definit com a dia solar el temps que transcorre entre que el Sol passa pel meridià local fins la següent culminació. Però aquest temps no és sempre el mateix, ja que, com s'ha dit anteriorment, la velocitat dels planetes no és uniforme. Aquestes diferències poden semblar poc importants, però com que són acumulatives, poden arribar als 16 minuts en alguns dies.

Un altre factor que crea variacions en la durada del dia és l'obliquïtat de l'òrbita, és a dir, la inclinació del pla de rotació terrestre amb el pla de translació al voltant del Sol, que és d'uns 23°. Això fa que sigui impossible calcular els angles, que ve a ser el temps, ja que per fer-ho s'agafa com a sistema de referència l'equador, perpendicular a l'eix de rotació. És a dir, per poder calcular el temps s'ha de crear un pla imaginari per on passa l'òrbita, alineat amb l'equador.

Si es fa una gràfica amb totes les variacions temporals per dia i la declinació, s'obté un analema, una corba en forma de vuit, que ve donada per l'equació del temps.

5. OBSERVACIÓ DE L'ANALEMA: TIMELAPSE AMB LA CÀMERA RASPBERRY PI

Per mostrar l'analema del Sol, la corba que descriu la situació del Sol sobreposant totes les posicions d'un any a la mateixa hora des del mateix lloc, es va decidir fer un *timelapse* amb les fotografies que es farien. Aquí apareixen els primers problemes: ha de ser des del mateix lloc exactament; per tant, no és factible fer-ho amb una càmera que es vagi movent. Per això, vam fer servir una Raspberry Pi.



Imatge 5.1: Analema. Font: staticflickr.com

Una Raspberry Pi és un ordinador monoplaça de baix cost (de 25 a 35€) que funciona amb diversos sistemes operatius de Linux, com ara, Raspbian, Arch Linux...



Imatge 5.2: Raspberry Pi. Font: www.raspberrypi.org

Es va iniciar la Raspberry i es va configurar, tal i com es diu a la pàgina web (www.raspberrypi.org). És a dir, descarregar el programa Raspbian, instal·lar-lo en una targeta microSD i posar-la dins la Raspberry. Per veure si funcionava, la vam connectar a la televisió amb un cable HDMI i la vam configurar (data, hora, lloc, idioma...). Però això no era gaire pràctic (haver-ho de fer tot tenint la Raspberry connectada al monitor de la televisió). Per això la vam connectar amb un cable ethernet al router de la WIFI de casa. Així, mitjançant una connexió ssh, es podia controlar la Raspberry amb qualsevol ordinador connectat a la xarxa WIFI. Per poder-s'hi connectar i donar ordres, s'ha d'obrir la terminal de l'ordinador i escriure:

```
jgdelrio@asus ~ $ ssh pi@(adreça ip de la raspberry pi)
```

Imatge 5.3: Ordre per establir una connexió ssh. Font: pròpia

Vam començar a fer algunes fotos amb una webcam que teníem, però la qualitat era molt baixa i no servia. Per això, va ser necessari comprar el mòdul de càmera de la Raspberry (uns 20€). Vam començar a fer proves, però en cap d'elles es veia bé el Sol, per això vam començar a buscar informació sobre els paràmetres per fotografiar-lo bé. El que es va trobar va ser que era molt important tenir poca sensibilitat (ISO) per només captar la llum del disc solar i una velocitat d'obertura el més lenta possible. D'aquesta manera, les fotografies es veien bé. Abans de començar a fotografiar el Sol cada dia a la mateixa hora, s'havia d'escollir el lloc on deixaria la càmera i protegir-la de la pluja. Al final vam decidir col·locar-la al balcó de casa, on es veu el Sol durant el migdia i la tarda i la vam protegir posant-la dins de petites carmanyoles de plàstic, com es pot veure a la imatge següent



Imatge 5.4: Muntatge de protecció per a la Raspberry Pi. Font: pròpia

Per poder fotografiar bé tot l'analema, vam decidir que faria diverses fotos a diverses hores de la tarda cada dia per escollir l'analema que sortís millor. Per això vam crear un petit programa amb *Python* que feia fer a la càmera 24 fotos en dues 2 hores, és a dir, una fotografia cada 5 minuts.

```
import time
import picamera
from datetime import datetime, timedelta

with picamera.PiCamera() as camera:
    camera.ISO=40
    camera.shutter_speed=10
    #camera.start_preview()
    time.sleep(2)
    for i in range(0,24):
        camera.capture('%s.jpg' % time.strftime("%b%d_%H-%M"))
        time.sleep(300)
```

Imatge 5.5: Script del programa de fotografia (dos_24.py). Font: pròpia

És a dir, s'importa la funció de temps i càmera. Es canvien els paràmetres d'ISO i de la velocitat d'obertura i es fa que la càmera faci 24 fotos, com es pot veure en l'ordre *for i in range (0,24)*, amb un temps entre cada foto de 5 minuts (300 segons). El programa guarda les fotos amb la data i l'hora en la que s'ha fet la fotografia.

Aquí va aparèixer un problema: aquest programa només s'executa quan rep l'ordre, no té cap hora determinada per començar-lo. Per això s'ha de fer servir "el dimoni Crontab", és a dir, un administrador de processos en segon pla que executa guions a intervals regulars.

Com es pot veure en la imatge, cada dia, a les 13:15 hores (15:15 hora local), la raspberry pi executa el programa dos_24.py (el de la imatge anterior), és a dir, comença a fer les fotos. Les altres ordres, que com es veu, entre una i la següent hi ha 5 minuts de diferència, serveixen per moure les imatges que fa la càmera a la carpeta on es guarden totes les fotos fetes a la mateixa hora però en dies diferents.

```
# m h dom mon dow command
15 13 * * * python ~/RECERCA/Script/dos_24.py
16 13 * * * mv ~/13-15.jpg ~/13-15/
21 13 * * * mv ~/13-20.jpg ~/13-20/
26 13 * * * mv ~/13-25.jpg ~/13-25/
31 13 * * * mv ~/13-30.jpg ~/13-30/
36 13 * * * mv ~/13-35.jpg ~/13-35/
41 13 * * * mv ~/13-40.jpg ~/13-40/
46 13 * * * mv ~/13-45.jpg ~/13-45/
51 13 * * * mv ~/13-50.jpg ~/13-50/
56 13 * * * mv ~/13-55.jpg ~/13-55/
01 14 * * * mv ~/14-00.jpg ~/14-00/
06 14 * * * mv ~/14-05.jpg ~/14-05/
11 14 * * * mv ~/14-10.jpg ~/14-10/
16 14 * * * mv ~/14-15.jpg ~/14-15/
21 14 * * * mv ~/14-20.jpg ~/14-20/
26 14 * * * mv ~/14-25.jpg ~/14-25/
31 14 * * * mv ~/14-30.jpg ~/14-30/
36 14 * * * mv ~/14-35.jpg ~/14-35/
41 14 * * * mv ~/14-40.jpg ~/14-40/
46 14 * * * mv ~/14-45.jpg ~/14-45/
51 14 * * * mv ~/14-50.jpg ~/14-50/
56 14 * * * mv ~/14-55.jpg ~/14-55/
01 15 * * * mv ~/15-00.jpg ~/15-00/
06 15 * * * mv ~/15-05.jpg ~/15-05/
11 15 * * * mv ~/15-10.jpg ~/15-10/
```

Imatge 5.6: Dimoni crontab. Font: pròpia

Un cop fetes les fotografies, s'ha de triar quina hora és la millor per mostrar l'analema. En el nostre cas, són les 14:30 UTC, és a dir, les 16:30 locals.

Per fer el *timelapse*, les fotografies han d'estar ordenades cronològicament, i no pas alfabèticament com ho fa la Raspberry. Per això, el que s'ha de fet és assignar a cada mes una lletra. així, en ordenar les fotografies alfabèticament, també ho farà cronològicament. Així doncs, l'abril tindrà una "a" al davant, el maig una "b", i així fins al setembre, que té una "f". Per canviar el nom, l'ordre és:

```
pi@raspberrypi:~/13-15 $ mv (nom vell) (nom nou)
```

Imatge 5.7: Script per canviar els noms dels fitxers. Font: pròpia

Per fer el timelapse el que s'ha de fer en primer lloc és descarregar el programa ImageMagick. Per fer-ho, s'escriu a la terminal de la Raspberry Pi:

```
jgdelrio@asus ~ $ sudo apt-get install ImageMagick -y
```

Imatge 5.8: Descarregar ImageMagick. Font: pròpia

Un cop descarregat el programa, ja es pot fer el timelapse amb les fotografies escollides i ordenades:

```
jgdelrio@asus ~ $ convert -delay 10 -loop 0 *.jpg timelapse.gif
```

Imatge 5.9: Script per fer el timelapse. Font: pròpia

És a dir, el que fa aquesta ordre és convertir totes les fotografies (*.jpg) en un arxiu gif (timelapse.gif), amb 10 centèsimes de segon entre fotograma (-delay 10). El timelapse es repetirà indefinidament (-loop 0).

Un cop fet el timelapse, per poder-lo veure se n'ha de fer una còpia a l'ordinador. Es fa servir l'ordre:

```
jgdelrio@asus ~ $ scp pi@(direcció ip):~/directori/timelapse.gif ~/Desktop/
```

Imatge 5.10: Ordre scp. Font: pròpia

En aquest punt, es poden fer dues coses: habilitar la Raspberry com a servidor web, o bé penjar el gif en qualsevol pàgina d'Internet.

Nosaltres vam optar per la segona opció, ja que la primera comporta grans dificultats que no es poden solucionar amb tan poc temps. Tot i així, com que aquesta part del projecte seguirà endavant tot l'any per mostrar l'analema complet, més endavant, com a continuació del projecte, s'habilitarà el servidor web.

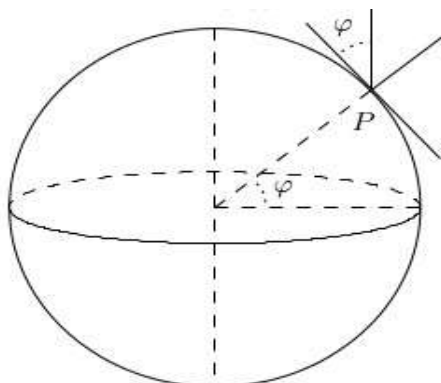
Actualment, si es vol veure el gif generat amb les fotos registrades durant el període de realització del treball de recerca, s'ha de visitar la següent pàgina web:

<https://gfycat.com/HappygoluckyThriftyBasilisk>

6. DISSENY DEL RELLOTGE ANALEMÀTIC

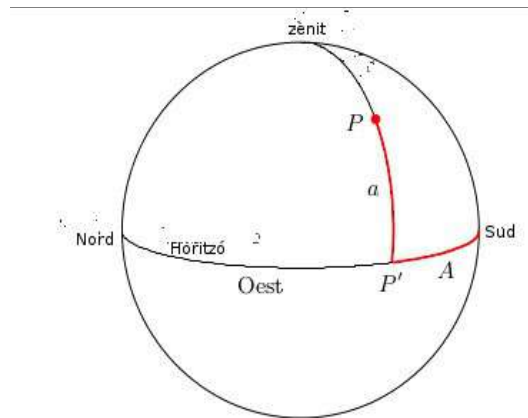
6.1 COORDENADES

Tot i que des del Renaixement se sap que la Terra gira al voltant del Sol, molt sovint en astronomia és més útil l'antic sistema: totes les estrelles i cossos celestes es mouen al llarg del dia i de la nit com si estiguessin enganxades en una gran esfera celest amb el centre en l'observador, que gira sobre un eix que uneix l'observador amb l'estrella polar. És a dir, quan s'adopta aquest punt de vista, l'observador es pot considerar el centre de l'esfera, i l'angle que forma el seu pla horitzontal amb l'eix de rotació de l'esfera és el que s'anomena latitud ϕ , com es pot veure en la imatge 6.1.



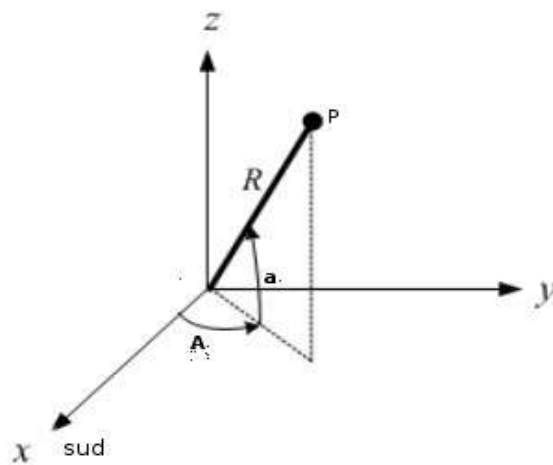
*Imatge 6.1: Latitud del lloc. Font: [UAB](#).
[Materials Matemàtics](#)*

L'horitzó astronòmic correspon a l'intersecció de l'esfera celeste centrada en un observador amb el seu pla horitzontal. És a dir, l'eix de les x és al pla horitzontal de l'observador i es dirigeix cap al sud, l'eix de les y també és al pla horitzontal i es dirigeix cap a l'oest, i l'eix de les z va cap al zènit, que és la intersecció de la vertical de l'observador amb l'esfera. A cada punt P en aquesta situació, se li poden associar dues coordenades, l'azimut i l'altura. L'altura a és definida com l'arc de cercle màxim que uneix P i el zènit, comprès entre el pla de l'horitzó i el punt P , i l'azimut A és definit com la distància angular mesurada sobre l'horitzó compresa entre el Sud i el peu d'altura a , com es pot veure en la imatge 6.2:



Imatge 6.2: Coordenades horitzontals. Font: UAB. Materials Matemàtics

Amb una mica de trigonometria, es pot arribar a aconseguir la fórmula del vector que té com a origen l'observador i final el punt P :

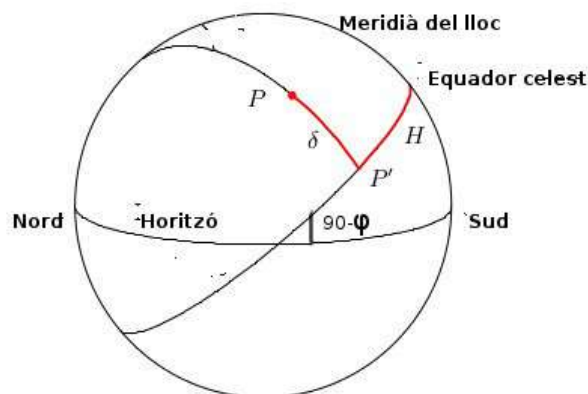


Imatge 6.3: Vector de les coordenades horitzontals. Font: Solar Shadows and Analematic Sundials

Així doncs:

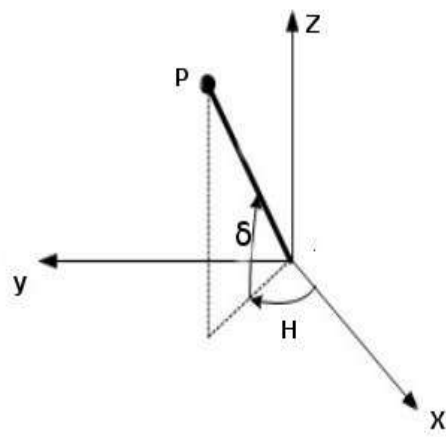
$$\vec{r}(A,a) = \begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \sin A \\ \sin a \end{pmatrix} \quad (1)$$

Un altre sistema de coordenades que es poden agafar són les anomenades equatorials, on l'eix Z talla els dos pols i el pla XY és l'equador de l'esfera celeste, on el centre és l'observador. L'eix X es dirigeix cap al sud del pla equatorial i l'Y cap a l'oest. Hi ha dues noves coordenades, la declinació δ i l'angle horari H . La declinació δ es defineix com la distància angular des de l'equador celeste fins a P , mesurada al llarg del cercle que passa per P i pels pols. En canvi, l'angle horari H és la distància angular sobre l'equador des de la intersecció del propi equador amb el meridià del lloc fins al cercle màxim esmenat abans que passa per P i pels pols:



Imatge 6.4: Coordenades equatorials. Font: [UAB. Materials Matemàtics](#)

Com en el cas anterior, utilitzant trigonometria es pot esbrinar el vector que té com a origen l'observador i passa per P:



Imatge 6.5: Vector de les coordenades equatorials. Font: [Solar Shadows and Analematic Sundials](#)

Així doncs:

$$\vec{r}(H, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si es vol aconseguir les fórmules que permeten tenir l'azimut A i l'altura a en funció de la declinació δ i l'angle horari H , s'ha de realitzar un canvi de coordenades. S'han de passar els eixos de les coordenades equatorials a les horitzontals. Per fer-ho, es realitza un gir de τ amb valor de 90° -latitud ϕ , sobre l'eix de les y , que coincideixen en els dos sistemes de coordenades com es pot comprovar amb una mica de geometria.

Així doncs, agafant (1) i (2) queda:

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \sin A \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau & 0 & -\sin \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tau & 0 & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3)$$

És a dir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a \cos A = \cos \tau \cos \delta \cos H - \sin \tau \sin \delta \\ \cos a \sin A = \cos \delta \sin H \\ \sin a = \sin \tau \cos \delta \cos H + \cos \tau \sin \delta \end{array} \right. \quad (4)$$

Si es divideix la primera entre la segona s'obté:

$$\cotg A = \cos \tau \cotg H - \frac{\tg \delta \sin \tau}{\sin H} \quad (5)$$

Aquesta equació, com es pot veure, relaciona l'azimut A amb l'angle horari H , la declinació δ i la latitud ϕ . En canvi, la tercera equació de (4), relaciona l'altura a amb les altres tres variables.

Així doncs, sabent la declinació δ , que es pot trobar en taules astronòmiques, i l'angle horari H , que està relacionat amb l'hora solar local, es pot saber les altres dues variables.

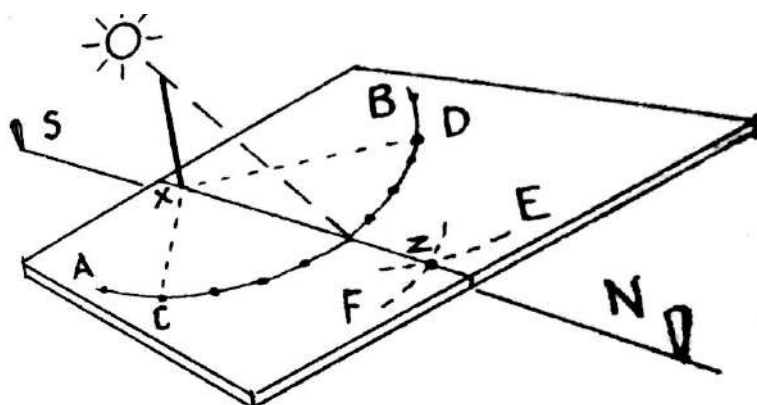
$$H = \frac{360(\text{hora solar} - 12)}{24} \quad (6)$$

Així doncs, l'angle horari H és zero al migdia, negatiu al matí i positiu a la tarda.

6.2 DETERMINACIÓ DE LA MERIDIANA

Un valor molt important a l'hora d'estudiar o construir rellotges de Sol és trobar la meridiana local, l'eix nord-sud real, que difereix uns quants graus amb el que marca una brúixola. Existeixen diverses maneres per determinar-la. La que hi ha a continuació és la més senzilla i a més es podrà aprofitar per determinar la latitud local.

El primer que s'ha de fer és trobar una superfície plana i a sobre fixar-hi una barra verticalment d'uns 25 cm. Durant dues hores abans i després del migdia, cada deu minuts s'ha d'anar senyalant el punt on cau l'extrem de l'ombra de la barra. Un cop transcorregut el temps, es traça una línia corba AB que contingui tots els punts marcats. El següent pas és buscar dos punts de la corba AB equidistants de x, el peu de la barreta. Seguidament el que s'ha de fer es trobar, amb l'ajuda d'un compàs, la bisectriu entre C i D, els punts anteriorment marcats. La bisectriu és la meridiana local:



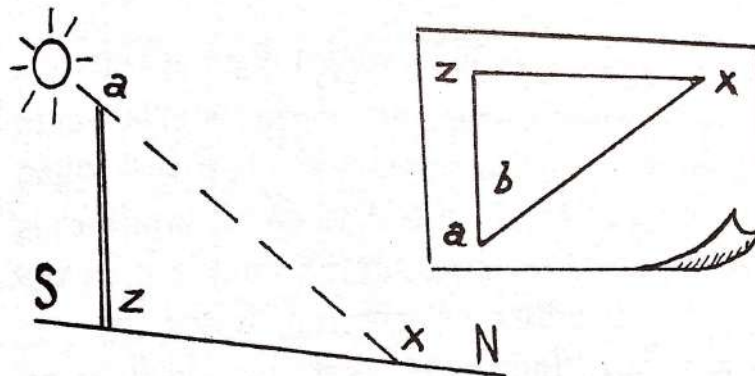
Imatge 6.6: Muntatge per determinar la meridiana. Font: [Rellotges de Sol. Història i l'art de construir-los.](#)

Com es pot veure, la bisectriu indica on hi ha el radi més curt de x fins a la corba AB, és a dir, l'ombra més curta, que correspon al moment en el qual el Sol està en el punt més alt de la seva trajectòria diària. Aquest moment es produeix exactament quan el Sol passa pel meridià local.

6.3 DETERMINACIÓ DE LA LATITUD LOCAL

En molts mapes es pot trobar la latitud local, però també es pot trobar de forma experimental.

Per fer-ho, s'usa el mateix muntatge que s'ha fet servir per trobar la meridiana local. En la imatge, la línia SN representa la meridiana i la barra vertical és za. Quan l'ombra cau en la meridiana es marca el punt x. En aquest moment ja es pot agafar paper i llapis per calcular trigonomètricament l'angle b .



Imatge 6.7: Muntatge per determinar la latitud. Font: Rellotges de Sol. Història i l'art de construir-los.

Com es pot veure, b serà l'arctangent de zx partit per za :

$$tgb = \frac{zx}{za}$$

$$b = \arctg\left(\frac{zx}{za}\right) \quad (7)$$

Aquest angle b representa la latitud sense sumar o restar la declinació del dia. Si la mesura es fa entre el 24 de setembre i el 20 de març (tardor i hivern), s'hi haurà de restar uns graus. En canvi, si la mesura és feta entre el 21 de març i el 23 de setembre (primavera i estiu), s'hi haurà de sumar uns graus.

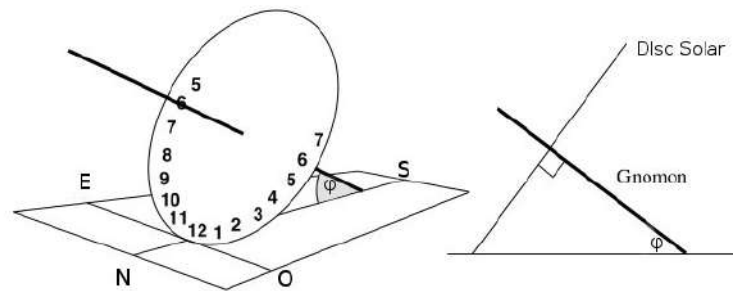
En el nostre cas, l'angle b ens va sortir de $57^\circ 54' 26,68''$, però al restar-hi la declinació pertinent del 8 de febrer ($15^\circ 9,6'$) s'obté $42,75^\circ$, un valor molt pròxim a la latitud real de Banyoles, que és de $42,11^\circ$, cometent així un error de 1,5%.



Imatge 6.8: Muntatge per a determinar la latitud experimentalment. Font: pròpia

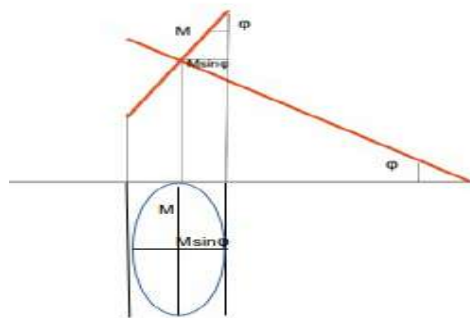
6.4 EL·LIPSE

Per determinar la fórmula de l'el·lipse que contindrà les marques horàries del rellotge analemàtic s'ha de fer la projecció ortonormal del disc horari d'un rellotge equatorial.



Imatge 6.9: Dibuix esquemàtic d'un rellotge equatorial. Font: [Australian Senior Mathematics Journal 22](#)

Com ja s'ha dit en l'apartat corresponent, els rellotges equatorials són formats per un estilet que forma amb l'horitzontal un angle amb el valor de la latitud ϕ (per tant, és paral·lel a l'eix de rotació de la terra) i un disc de radi M perpendicular a l'estilet amb les hores marcades cada 15° . A l'hemisferi nord l'estilet s'orienta cap al nord i a l'hemisferi sud, cap al sud.

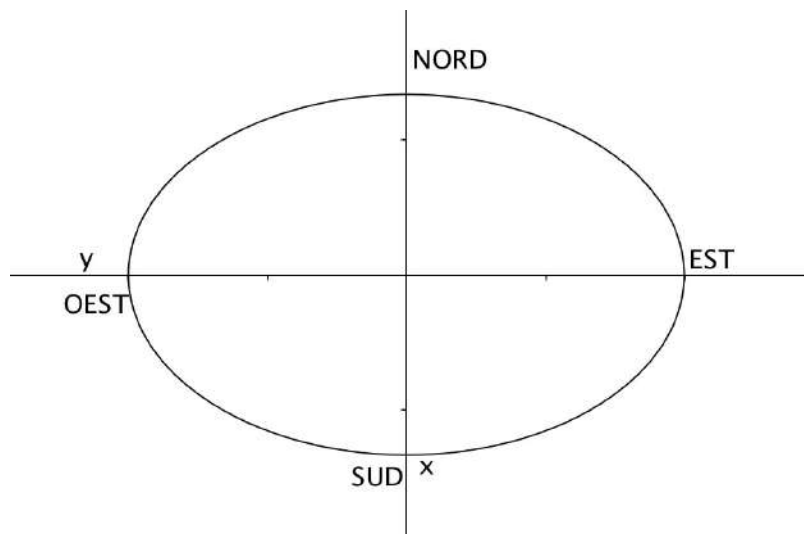


Imatge 6.10: Projecció ortonormal d'un rellotge equatorial. Font: pròpia

Utilitzant trigonometria bàsica, es pot comprovar que el semieix menor de l'el·lipse, que estarà sobre el meridià local, farà $M \sin \varphi$, i el semieix major, que tindrà direcció est-oest, M . Per tant, l'equació de l'el·lipse serà:

$$\frac{x^2}{(M \sin \varphi)^2} + \frac{y^2}{M^2} = 1 \quad (8)$$

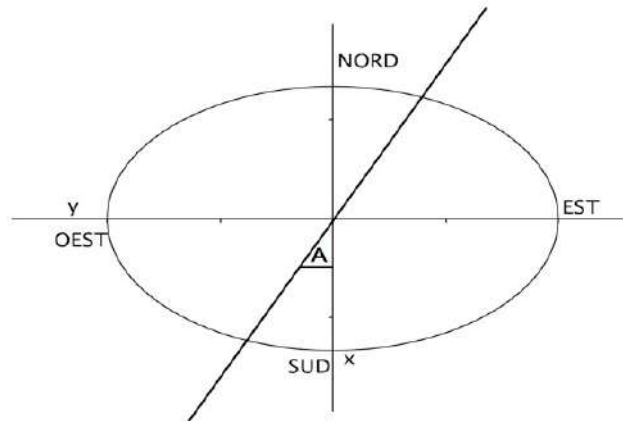
L'el·lipse serà així, essent l'eix x positiu cap al sud i l'eix y positiu cap a l'oest, com els eixos de coordenades horitzontals de l'apartat anterior:



Imatge 6.11: El·lipse del rellotge analemàtic. Font: pròpia, feta amb Geogebra

6.5 MARQUES HORÀRIES

Sabent que l'angle que forma la projecció al terra dels raigs de Sol un dia sense declinació amb el meridià (o, que és el mateix, l'eix x de l'el·lipse), es poden trobar les marques de les diferents hores.



Imatge 6.12: El·lipse del rellotge tallada per una ombra. Font: pròpia, feta amb Geogebra

Mirant la Imatge 6.10, es pot veure que el pendent de la recta (la projecció del raig de Sol al terra) correspon a la tangent de l'azimut A d'un dia sense declinació. És a dir, modificant la fórmula (5), ens queda:

$$\operatorname{tg}A = \frac{\sin H}{\cos H \cos \tau} = \frac{\sin H}{\sin \varphi \cos H} \quad (9)$$

Per tant, l'equació de la recta serà:

$$y = \frac{\sin H}{\cos H \sin \varphi} x \quad (10)$$

Si es fa un sistema amb la recta (10) i l'el·lipse (8), és a dir, si es busquen les interseccions, es troben les marques horàries, essent les opcions negatives les que s'usaran principalment, ja que és quan hi ha Sol:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sin H}{\cos H \sin \varphi} x \\ \frac{x^2}{(M \sin \varphi)^2} + \frac{y^2}{M^2} = 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2}{(M \sin \varphi)^2} + \frac{\left(\frac{\sin H}{\cos H \sin \varphi} x \right)^2}{M^2} = 1$$

$$x^2 (\cos H)^2 + x^2 (\sin H)^2 = M^2 (\cos H)^2 (\sin \varphi)^2$$

$$x^2 ((\cos H)^2 + (\sin H)^2) = M^2 (\cos H)^2 (\sin \varphi)^2$$

$$x^2 = M^2 (\cos H)^2 (\sin \varphi)^2$$

$$x = \pm M \cos H \sin \varphi$$

$$y = \pm M \sin H$$

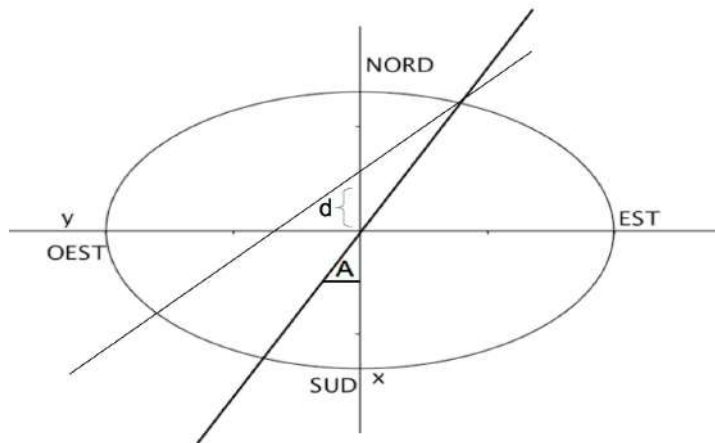
$$(x, y) = (\pm M \cos H \sin \varphi, \pm M \sin H) \quad (11)$$

6.6 CORRECCIONS DE TEMPS

En l'apartat anterior, s'ha esbrinat on col·locar les marques horàries en un dia sense declinació (equinocci), per tant, si es vol que l'ombra d'un gnòmon en un dia qualsevol amb declinació φ en una hora qualsevol "caigui" en l'hora corresponent, s'ha de desplaçar el gnòmon sobre l'eix x una distància d , com es pot veure en l'imatge 6.1.

Per tant, l'equació de la recta d'un dia amb declinació φ serà, fent servir (5):

$$y = \operatorname{tg} A (x - d) = (x - d) \frac{\sin H}{\cos H \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi} \quad (12)$$



Imatge 6.13: El·lipse amb l'ombra de dos dies. Font: pròpia, feta amb Geogebra

Si es vol trobar la distància d , s'ha de resoldre el sistema format per les equacions de les marques horàries (11) i la recta (12):

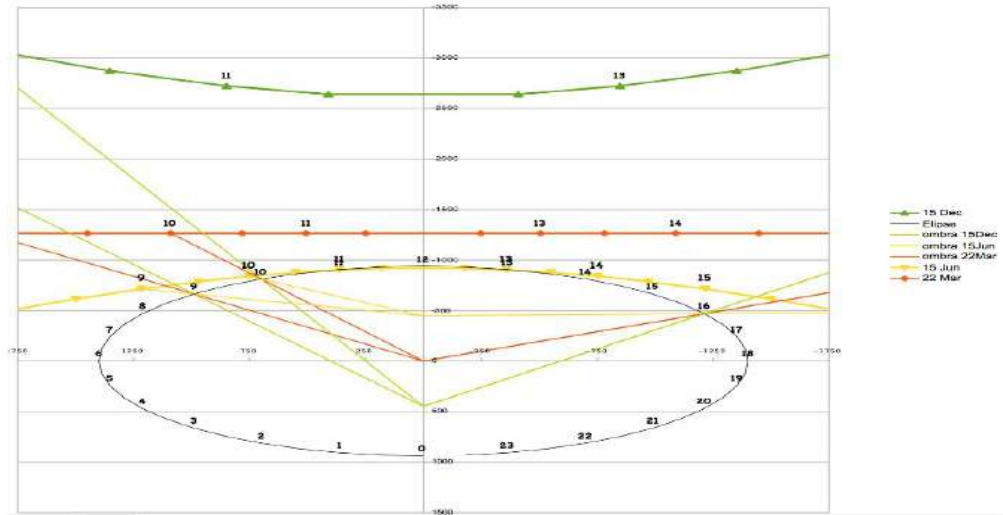
$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (-M \cos H \sin \phi, -M \sin H) \\ y = (x-d) \frac{\sin H}{\cos H \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi} \end{array} \right.$$

$$-M \sin H = \frac{-M \cos H \sin \phi \sin H - d \sin H}{\cos H \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi}$$

$$d \sin H = -M \sin H \cos H \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi M \sin H + M \cos H \sin H \sin \phi$$

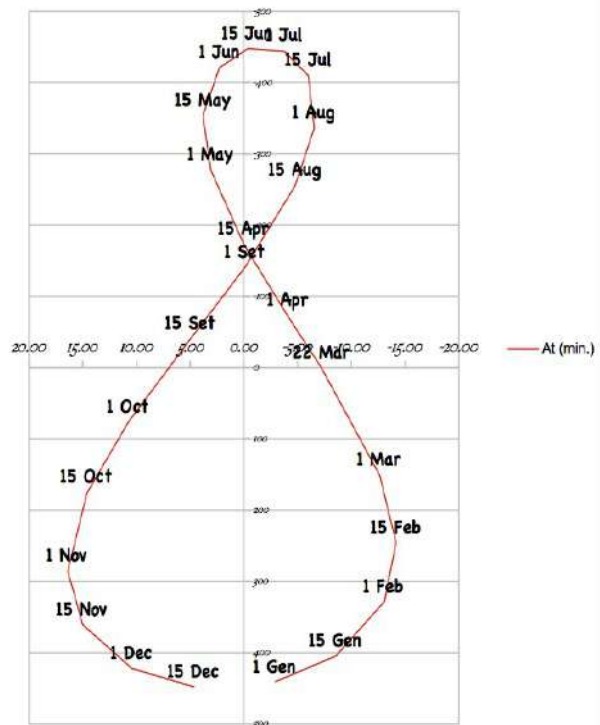
$$d = -M \cos \phi \operatorname{tg} \delta \quad (13)$$

Gràficament, es veu clarament aquí:

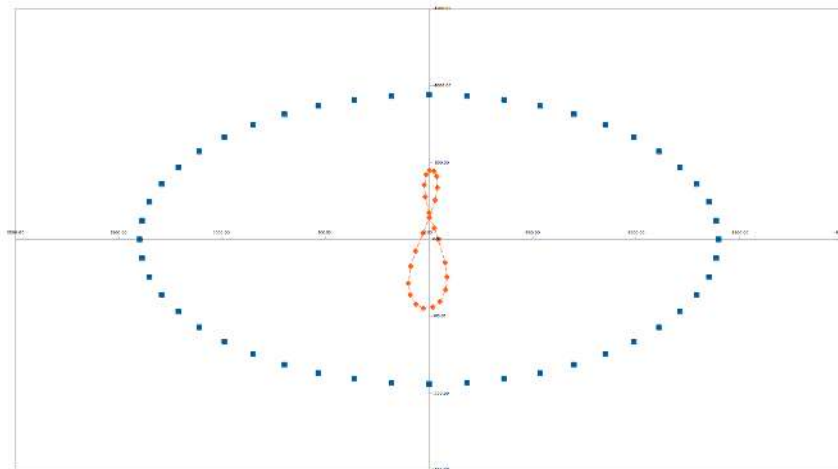


Imatge 6.14: Gràfic amb les posicions de les ombres i la posició de l'eix de diferents dies. Font: pròpia

Sabem que es podrien aplicar altres correccions de temps, el que s'anomena equació del temps, que forma l'analema, però comporta altres problemes; per això s'ha decidit no fer-lo en el rellotge, tot i que seria així:



Imatge 6.15: Euació del temps. Font: pròpia



Imatge 6.16: Rellotge analemàtic amb l'analema per a les dotze. Font: pròpia

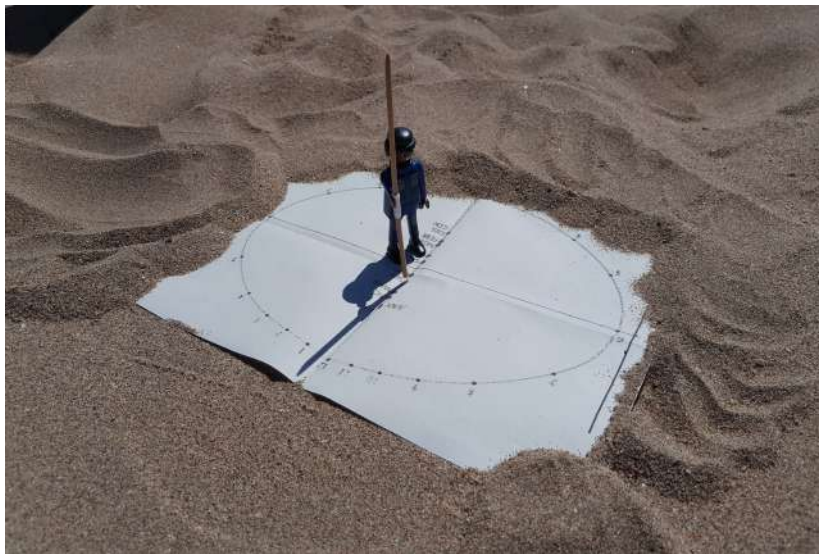
Els problemes que comporta l'equació del temps (obtinguda a <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/solar/tiempo/tiempo.html>) són que, o bé l'analema seria només per a una hora, cosa que fa que a la resta d'hores la lectura horària sigui errònia, o haver de dibuixar un analema per a cada hora, cosa que dificulta la lectura de les hores. No obstant, les correccions poden fer-se de forma aritmètica: sumant o restant els minuts indicats per l'equació del temps (imatge 6.15) a l'hora indicada pel rellotge solar obtindríem l'hora mitjana (la que utilitzem als nostres rellotges convencionals).

Com s'ha pogut comprovar, en cap moment es determina l'alçada del gnòmon, tot està en funció del semieix major de l'el·lipse (M), de la que depenen totes les altres variables. Però és molt important escollir bé la mida de M ; ha d'estar relacionada amb l'alçada del gnòmon. Si M és molt més gran que el gnòmon, l'ombra mai talla l'el·lipse, per tant, el rellotge perd tota la fiabilitat i la utilitat. En canvi, si M és molt més petita que el gnòmon, l'ombra sempre interseccionarà amb l'el·lipse, però les marques dels mesos estaran molt a prop, i per tant, perdrà molta precisió, els errors seran majors. Per tant, la millor opció és que M i l'alçada del gnòmon siguin iguals.

7. CONSTRUCCIÓ DEL RELLOTGE ANALEMÀTIC

7.1 PRIMERS PASSOS

El primer rellotge analemàtic construït, no era res més que una impressió sobre un DIN A4, i el gnòmon era un ninot, per tant, tot el rellotge era portàtil.



Imatge 7.1: Primer prototip. Font: [pròpia](#)

Però aquí apareix el principal problema: determinar l'orientació. No és pràctic determinar la meridiana cada cop que s'usa el rellotge i tampoc és factible fer servir una brúixola, ja que, a part que no marca el nord real, la presència de camps magnètics fa que l'error sigui molt gran. Per això, s'ha de buscar una altra manera d'orientar el rellotge. Una forma de fer-ho és insertar dins del rellotge analemàtic un rellotge horitzontal. Així, les hores dels dos rellotges coincidiran si tot el complex està ben orientat, és a dir, si està en la direcció nord-sud. En qualsevol altra situació els dos rellotges marcaran hores completament diferents.

Per tant, el rellotge que es construirà serà un rellotge analemàtic que es mourà solidàriament amb un d'horitzontal. Així, es podrà autorientar.

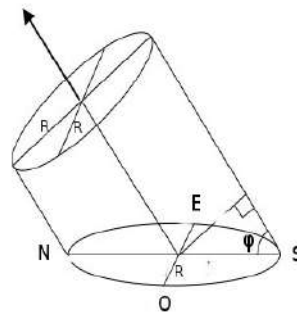
7.2 CÀLCULS DEL RELLOTGE HORIZONTAL

Com s'ha dit en l'apartat corresponent, un rellotge horitzontal és la projecció gnomònica d'un rellotge equatorial sobre el terra, per tant:

$$\sin \varphi = \frac{R}{b}$$

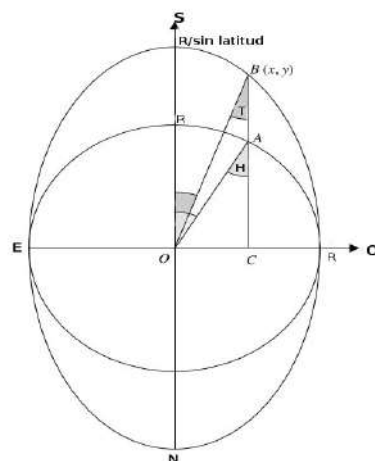
$$b = \frac{R}{\sin \varphi}$$

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{R^2} = 1 \quad (14)$$



Imatge 7.2: Projecció d'un rellotge equatorial sobre el terra. Font: Australian Senior Mathematics Journal 22

Per calcular els angles que hi ha entre hores, es fa servir:



Imatge 7.3 : Superposició d'un rellotge equatorial sobre un d'horitzontal per tal de trobar la relació horària. Font: Australian Senior Mathematics Journal 22

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2(\sin\phi)^2}{R^2} = 1$$

$$\sin H = \frac{y}{R} \rightarrow y = R \sin H$$

$$\operatorname{tg} T = \frac{y}{x}$$

$$\frac{(R \sin H)^2}{R^2} + \frac{x^2(\sin\phi)^2}{R^2} = 1$$

$$x^2 = \frac{R^2 \cdot (1 - (\sin H)^2)}{(\sin\phi)^2}$$

$$x = \frac{R \cos H}{\sin\phi}$$

$$\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} H \sin\phi$$

$$T = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} H \sin\phi) \quad (15)$$

Sovint no s'acaba dibuixant l'el·lipse dels rellotges horitzontals, ja que només amb els angles que formen les línies horàries amb l'eix nord-sud es pot fer una lectura correcta de l'hora.

7.3 MATERIAL I EINES

El material i eines necessàries per construir el rellotge seran:

- Centre de taula giratori
- Pirògraf
- Estris d'escriure
- Regle
- Paper amb el disseny del rellotge analemàtic i l'horitzontal
- Punxó
- Cera
- Cinta adhesiva

- Cola
- Fusta

7.4 TAULES DE VALORS

Realitzant els càlculs dels apartats anteriors, i tenint en compte que l'eix de les x és el nord-sud positiu cap a sud i l'eix de les y és l'est-oest positiu cap a l'oest, s'obté que per un semieix major de 14cm, les marques horàries del rellotge analemàtic serien:

Hora Solar		El·lipse	
En minuts	En hores	y (mm)	x (mm)
240,00	4,00	1212,44	469,39
250,00		1241,82	433,48
260,00		1268,83	396,74
270,00		1293,43	359,25
280,00		1315,57	321,08
290,00		1335,20	282,30
300,00	5,00	1352,30	242,97
310,00		1366,81	203,19
320,00		1378,73	163,02
330,00		1388,02	122,54
340,00		1394,67	81,82
350,00		1398,67	40,95
360,00	6,00	1400,00	0,00
370,00		1398,67	-40,95
380,00		1394,67	-81,82
390,00		1388,02	-122,54
400,00		1378,73	-163,02
410,00		1366,81	-203,19
420,00	7,00	1352,30	-242,97
430,00		1335,20	-282,30
440,00		1315,57	-321,08
450,00		1293,43	-359,25
460,00		1268,83	-396,74
470,00		1241,82	-433,48
480,00	8,00	1212,44	-469,39
490,00		1180,75	-504,41
500,00		1146,81	-538,46
510,00		1110,69	-571,49
520,00		1072,46	-603,44
530,00		1032,19	-634,23

Hora Solar		El·lipse	
En minuts	En hores	y (mm)	x (mm)
540,00	9,00	989,95	-663,82
550,00		945,83	-692,14
560,00		899,90	-719,15
570,00		852,27	-744,78
580,00		803,01	-769,00
590,00		752,22	-791,76
600,00	10,00	700,00	-813,01
610,00		646,45	-832,71
620,00		591,67	-850,82
630,00		535,76	-867,32
640,00		478,83	-882,16
650,00		420,99	-895,33
660,00	11,00	362,35	-906,79
670,00		303,02	-916,53
680,00		243,11	-924,52
690,00		182,74	-930,75
700,00		122,02	-935,21
710,00		61,07	-937,89
720,00	12,00	0,00	-938,78
730,00		-61,07	-937,89
740,00		-122,02	-935,21
750,00		-182,74	-930,75
760,00		-243,11	-924,52
770,00		-303,02	-916,53
780,00	13,00	-362,35	-906,79
790,00		-420,99	-895,33
800,00		-478,83	-882,16
810,00		-535,76	-867,32
820,00		-591,67	-850,82
830,00		-646,45	-832,71

Hora Solar		El·lipse	
En minuts	En hores	y (mm)	x (mm)
840,00	14,00	-700,00	-813,01
850,00		-752,22	-791,76
860,00		-803,01	-769,00
870,00		-852,27	-744,78
880,00		-899,90	-719,15
900,00	15,00	-989,95	-663,82
910,00		-1032,19	-634,23
920,00		-1072,46	-603,44
930,00		-1110,69	-571,49
940,00		-1146,81	-538,46
950,00		-1180,75	-504,41
960,00	16,00	-1212,44	-469,39
970,00		-1241,82	-433,48
980,00		-1268,83	-396,74
990,00		-1293,43	-359,25
1000,00		-1315,57	-321,08
1010,00		-1335,20	-282,30
1020,00	17,00	-1352,30	-242,97
1030,00		-1366,81	-203,19
1040,00		-1378,73	-163,02
1050,00		-1388,02	-122,54
1060,00		-1394,67	-81,82
1070,00		-1398,67	-40,95
1080,00	18,00	-1400,00	0,00
1090,00		-1398,67	40,95
1100,00		-1394,67	81,82
1110,00		-1388,02	122,54
1120,00		-1378,73	163,02
1130,00		-1366,81	203,19
1140,00	19,00	-1352,30	242,97
1150,00		-1335,20	282,30
1160,00		-1315,57	321,08
1170,00		-1293,43	359,25
1180,00		-1268,83	396,74
1185,00		-1255,62	415,21
1200,00	20,00	-1212,44	469,39

I les marques per les dates, realitzant els càlculs anteriors:

Dia	Declinació (graus)	Desplaçament (mm)
1 gen	-23,01	44,11
15 gen	-21,27	40,43
1 feb	-17,52	32,79
15 feb	-13,29	24,53
1 març.	-8,29	15,13
15 març.	-2,3	4,17
1 abril.	4,02	-7,30
15 abril.	9,41	-17,21
1 maig.	14,9	-27,64
15 maig.	18,79	-35,34
1 juny.	22,04	-42,05
15 juny.	23,31	-44,75
1 jul	23,12	-44,34
15 jul	21,52	-40,95
1 agost.	17,91	-33,57
15 agost.	13,78	-25,47
1 set	7,72	-14,08
15 set	2,22	-4,03
1 oct	-4,22	7,66
15 oct	-9,6	17,57
1 nov	-15,36	28,53
15 nov	-19,15	36,07
1 des	-22,11	42,19
15 des	-23,34	44,82

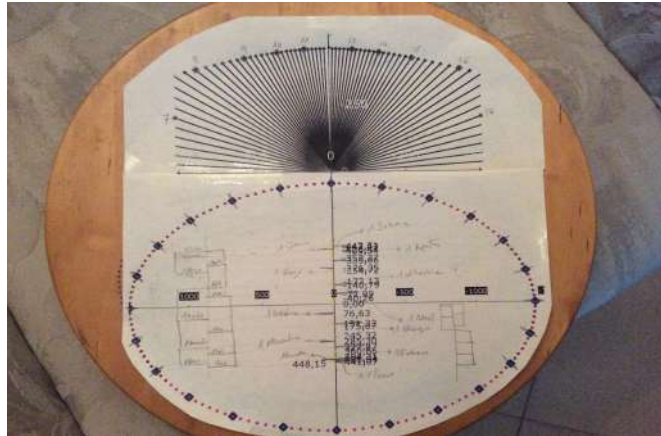
Per altra part, els angles que faran les línies horàries del rellotge horitzontal amb l'eix seran, essent el 0 la línia de les dotze:

Hora Solar		Angle
En minuts	En hores	
360,00	6,00	-90,00
370,00		-86,27
380,00		-82,57
390,00		-78,89
400,00		-75,27
410,00		-71,71
420,00	7,00	-68,22
430,00		-64,82
440,00		-61,51
450,00		-58,30
460,00		-55,19
470,00		-52,18
480,00	8,00	-49,27
490,00		-46,47
500,00		-43,76
510,00		-41,15
520,00		-38,63
530,00		-36,20
540,00	9,00	-33,84
550,00		-31,57
560,00		-29,36
570,00		-27,23
580,00		-25,15
590,00		-23,13
600,00	10,00	-21,16
610,00		-19,24
620,00		-17,36
630,00		-15,52
640,00		-13,72
650,00		-11,94
660,00	11,00	-10,19
670,00		-8,46
680,00		-6,74
690,00		-5,05
700,00		-3,36
710,00		-1,68

Hora Solar		Angle
En minuts	En hores	
720,00	12,00	0,00
730,00		1,68
740,00		3,36
750,00		5,05
760,00		6,74
770,00		8,46
785,00		11,06
795,00		12,82
805,00		14,62
815,00		16,44
825,00		18,30
835,00		20,20
845,00		22,14
855,00		24,13
865,00		26,18
875,00		28,29
885,00		30,46
895,00		32,70
905,00		35,01
915,00		37,40
925,00		39,88
935,00		42,44
945,00		45,10
955,00		47,86
965,00		50,71
975,00		53,67
985,00		56,73
995,00		59,89
1005,00		63,15
1015,00		66,51
1025,00		69,95
1035,00		73,48
1045,00		77,07
1055,00		80,72
1065,00		84,42
1075,00		88,14

7.5 PROCÉS DE CONSTRUCCIÓ

Per construir el rellotge analemàtic-horitzontal autorientable el primer que s'ha de fer és imprimir els dos rellotges en dos fulls DIN A4 i enganxar-los amb cinta adhesiva de tal manera que els eixos verticals coincideixin, com es pot veure en la imatge 7.4.



Imatge 7.4: Rellotge analemàtic i horitzontal enganxats. Font: pròpia

El pas següent és pintar amb una cera qualsevol el revers dels rellotges i enganxar-los al centre de taula giratori SNUDDA d'IKEA. Seguidament, amb un llapis es ressegueixen totes les línies i punts dels rellotges, així la cera es marcarà en el centre de taula. També fora bo que amb una agulla o punxó es foradessin totes les marques horàries del rellotge.

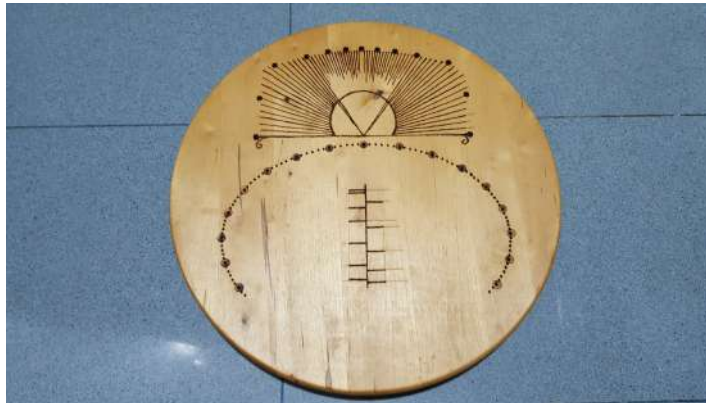
Es desenganxen els papers, i el centre de taula queda així:



Imatge 7.5: Centre de taula amb les marques dibuixades. Font: pròpia

Amb un pirògraf (aparell per “dibuixar sobre fusta” que hi marca la imatge cremant-ne la superfície), es ressegueixen totes les marques fetes amb cera.

Seguidament, cal enganxar el gnòmon del rellotge horitzontal, que ha de ser paral·lel a l'eix terrestre, és a dir, l'angle que forma amb el pla horitzontal és la latitud ($42,11^\circ$). Per això, la proporció entre l'alçada i la longitud de l'estilet triangular de fusta ha de ser la tangent. És a dir, si fa 6 cm de longitud, farà 5.4 cm.



Imatge 7.6: Rellotge amb les marques resseguides pel pirògraf. Font: pròpia

Es tallen dos petits llistons de fusta i s'enganxen un a cada costat de l'eix nord-sud del rellotge horitzontal amb un espai (el gruix del gnòmon) entre ells. Així l'estilet s'encaixa entre els llistons.

Ara només falta buscar un gnòmon per al rellotge analemàtic, que podria ser un ninot amb un pal a la mà.



Imatge 7,7: El rellotge un cop acabat. Font: pròpia

8. CONCLUSIONS I RETROSPECTIVA

Aquest treball ha durat aproximadament un any, dotze mesos en els quals s'ha treballat per complir els objectius. Una època per aprendre nous coneixements, per formar-se...

L'objectiu principal del projecte, com es diu a la introducció, era construir un rellotge de Sol analemàtic, per tant, es pot dir que sí que s'han complert els objectius. Potser el rellotge resultant, no és com el que ens vam plantejar al començament del treball. Havíem pensat amb un rellotge gran, en el qual el gnòmon fos una persona, i que estaria al pati de l'institut. En canvi, la realitat és ben diferent, el rellotge és portàtil, de mida petita, i el gnòmon és de la mida d'un ninot. Però salvant les diferències, s'han complert tots els objectius: com ja s'ha dit, s'ha fet un rellotge analemàtic després de fer els càlculs pertinents, i més, s'ha fet un estudi solar a Banyoles, com també es tenia la intenció de fer. A més a més, tot i que el rellotge és petit, presenta alguns avantatges, com l'autorientabilitat gràcies a la presència d'un altre rellotge solar solidari amb l'analemàtic. Amb aquesta estratègia, la "solidaritat" de dos rellotges solars de diferents tipus (analemàtic i horitzontal), podem solucionar un problema inherent a tots els rellotges solars: la seva correcta orientació nord-sud.

Per poder construir el rellotge analemàtic s'ha hagut de trobar la meridiana local, calcular la latitud, desenvolupar geomètricament fòrmules per poder dissenyar el rellotge... I tot això per construir un rellotge analemàtic i horitzontal de fusta, de petites dimensions i autorientable.

Sabem que amb una mica més de temps hauríem fet tot el que ens imaginàvem al començar:

- S'hagués pogut construir el rellotge analemàtic al pati; així, tots els alumnes el podrien fer servir, i a part, queda molt bé com a decoració d'espais oberts.
- El timelapse de la Raspberry Pi de la posició del Sol hauria abastat tot l'any, i per tant, es veuria clarament que es descriu una corba en forma d'analema.

Però sabem que realitzar aquests dos aspectes era gairebé impossible en els terminis imposats. No es podien realitzar fotografies ni fer el vídeo durant un any sencer perquè el

treball no ha durat ben bé un any sencer; tot i així, aquesta part del projecte encara està viva i en un futur la Raspberry Pi serà un servidor web on hi haurà el timelapse complet i altres materials usats durant el projecte. Tampoc s'ha pogut construir el rellotge al pati per falta de temps. A més a més, la construcció del rellotge al pati no es podia fer a corre-cuita. Una feina com aquesta comporta molts aspectes a tenir en compte, entre ells la part artística, que requereix temps i estudis preliminars, i la dificultat que té fer dibuixos a una escala tan gran. Tot i així, encara som a temps de construir-lo algun dia, tot i que no com a part del treball.

De totes maneres, hem après nous coneixements, sobretot matemàtics, que segurament seran necessaris en el nostre futur, hem descobert un nou món, el de la gnomònica, apassionant i molt útil, i hem demostrat que les matemàtiques en general i la trigonometria en particular tenen aplicacions interessants i assequibles per a tothom.

Tot i que la gnomònica portava dècades en declivi per l'arribada i la comercialització de rellotges mecànics o digitals, actualment és un camp amb cada cop més aficionats, ja que la seva aplicació crea bells ornaments útils per a tothom. L'art de construir quadrants és patrimoni de tots, és un tret distintiu del nostre entorn, per aquest motiu l'hem de protegir.

GLOSSARI

Afeli: punt de l'òrbita terrestre on la Terra està més allunyada del Sol.

Analema: corba que descriu la posició del Sol a una determinada hora des d'un lloc d'observació determinat. També es dibuixen en alguns rellotges de Sol per tal de fer-los més precisos, essent el component de l'eix x l'equació del temps i la declinació del temps en les ordenades.

Angle horari: coordenada equatorial d'un punt P que correspon a la distància angular de l'equador comprès entre el peu del meridià que conté P i el meridià del lloc.

Altura: coordenada horitzontal d'un punt P que correspon a l'arc del cercle màxim que uneix P i el zènit, comprès entre el punt P i l'horitzó.

Azimut: coordenada horitzontal d'un punt P que correspon a l'arc d'horitzó comprès entre el sud i el peu de l'altura.

Declinació: coordenada equatorial d'un punt P que correspon a l'arc de meridià comprès entre el pla de l'equador i el punt.

Dia sideral: temps que triga la Terra a donar una volta en el seu eix mesurat des d'una estrella llunyana. Aquest dia difereix en 4 minuts del dia solar mitjà.

Dia solar mitjà: període de temps entre dues culminacions consecutives del Sol mitjà (velocitat constant i per l'equador). Pot diferir amb el dia solar verdader un màxim de 16 minuts.

Dia solar verdader: període de temps entre dos passos consecutius del Sol pel meridià del lloc.

Eclíptica: trajectòria aparent que descriu el Sol.

Equador: cercle màxim de l'esfera terrestre que té com a centre el de la Terra.

Equador celeste: equador de l'esfera celeste.

Equinocci: Intersecció entre l'equador celeste i l'eclíptica.

Esfera celeste: esfera ideal de radi arbitrari amb l'observador com a centre.

Estilet: part d'un rellotge solar que produeix l'ombra. També s'anomena gnòmon.

Horitzó: intersecció del pla de l'horitzó amb l'esfera celeste.

Meridià: cercle màxim que passa pels pols i per un punt de la Terra. El meridià de referència és el de Greenwich.

Nadir: punt oposat al zènit.

Latitud: angle comprès entre l'equador i un punt, normalment l'observador. És positiva cap al nord i negativa cap al sud.

Paral·lel: cercle paral·lel a l'equador i que passa per un punt qualsevol de la Terra.

Periheli: punt de l'òrbita terrestre on la Terra està més propera al Sol.

Pla equatorial: pla ideal situat a l'equador.

Pla horitzontal: pla tangent a l'esfera celeste que té l'observador com a centre.

Quadrant solar: rellotge solar.

Solstici: dies on la declinació és la màxima, és a dir, l'eclíptica està més separada de l'equador.

Zènit: intersecció de la vertical de l'observador amb l'esfera celeste

BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

Armengol, Montserrat; Mercader, Joan; Serra, Salvador. *Física 2n Batxillerat*. McGraw-Hill. Bizkaia, 2009.

Barbero, A. J.. *Tablas de declinación* (en línia).

<<https://www.uclm.es/profesorado/ajbarbero/FAA/tablas%20declinacion%20dr%20Et.pdf>>

(Consulta: juny 2016)

Budd, C.J.; Sangwin, C.J. *Analematic sundials: how to build one and why they work*" (en línia). Millennium Mathematics Project, University of Cambridge University.

< <http://plus.maths.org/issue11/features/sundials/> > (Consulta: agost 2016)

Centelles Cervera, Santiago; Escolano Lumbreras, Elsa; Garrido González, Antonio et al. *Matemàtiques 1r BTX*. Grup Edebé. Barcelona, 2008.

Corvis, Alex. *Timelapse 24 horas con Raspberry Pi+Cámara USB* (en línia). Geeky Theory.

<<https://geekytheory.com/timelapse-24-horas-con-raspberry-pi-webcam-usb/>> (Consulta: abril 2016)

Fundamentos Físicos de las Energías Renovables. *La ecuación del tiempo* (en línia)

<<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/solar/tiempo/tiempo.html>> (Consulta: agost 2016)

Girbau, Joan. *Relotges de Sol*. Departament de Matemàtiques; Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, 1988

Jones, Dave. *Picamera*. (en línia)

<<https://picamera.readthedocs.io/en/release-1.12/index.html>> (Consulta: abril 2016)

Mans, Claudi. *Analmàtics Barceloni* (en línia). 11 d'octubre de 2014.

<<https://cmans.wordpress.com/2014/10/11/analematics-barcelonins/>> (Consulta: juny 2016)

Palau, Miquel. *Relotges de Sol: Història i l'art de construir-los*. Editorial Millà. Barcelona, 1977.

Pérez Ortiz, Juan Vicente. *La medición del tiempo y los relojes de Sol*. Academia de Ciencias e Ingenierías de Lanzarote. Publicació: 7 de juliol de 2006.

<<http://www.academiadelanzarote.es/Discursos/Discurso%2020.pdf>> (Consulta: agost 2016)

Raspberry Pi. *Time-lapse animations with a Raspberry Pi*. (en línia) Raspberry Pi Learning Resources.

<<https://www.raspberrypi.org/learning/timelapse-setup/worksheet/>> (Consulta: setembre 2016)

Sánchez Rabat, S. *La variación de la excentricidad de la Tierra* (en línia). Cambio climático, energía. Publicació: 23 de maig de 2010.

<<http://cambioclimaticoenergia.blogspot.com.es/2010/05/la-variacion-de-la-excentricidad-de-la.html>> (Consulta: maig 2016)

Societat Catalana de Gnomònica. *Història dels rellotges de Sol*. (en línia).

<<http://www.gnomonica.cat/index.php/gnomonica/introduccio-a-la-gnomonica/historia-dels-rellotges-de-sol>> (Consulta: març 2016)

Snyder, Donald L. *Solar Shadows and Analemmatic Sundials* (en línia) Publicació: 23 de gener del 2006.

< http://dls-website.com/documents/Analemmatic_Sundials.pdf > (Consulta: agost 2016)

Vincent, Jill. "The mathematics of sundials". *Australian Senior Mathematics Journal*. Vol. 22, núm 22. 2008. Pàg. 13-23.

ÍNDEX D'IMATGES

Imatge 2.1. Rellotge egipci.....	8
Imatge 2.2. Scaphe grec.....	8
Imatge 2.3. Rellotge medieval àrab.....	9
Imatge 2.4. Meridiana de l'església de San Nicolò de Catania.....	10
Imatge 2.5. Rellotge solar en forma de díptic.....	11
Imatge 2.6. Rellotge solar actual de precisió.....	11
Imatge 3.1. Rellotge equatorial.....	13
Imatge 3.2. Rellotge horitzontal.....	14
Imatge 3.3. Rellotge vertical.....	14
Imatge 3.4. Rellotge vertical declinat.....	15
Imatge 3.5. Rellotge de pastor.....	15
Imatge 3.6. Rellotge bifilar.....	16
Imatge 3.7. Rellotge anular.....	16
Imatge 3.8. Rellotge analemàtic.....	17
Imatge 4.1. Representació de la tercera llei de Kepler.....	18
Imatge 5.1. Analema.....	20
Imatge 5.2. Raspberry Pi.....	20
Imatge 5.3. Ordre per establir una connexió ssh.....	21
Imatge 5.4. Muntatge de protecció per a la Raspberry Pi.....	21
Imatge 5.5. Script del programa de fotogràdia (dos_24.py).....	22
Imatge 5.6. Dimoni crontab.....	22
Imatge 5.7. Script per canviar els noms dels fitxers.....	23
Imatge 5.8. Descarregar ImageMagick.....	23
Imatge 5.9. Script per fer el timelapse.....	23
Imatge 5.10. Ordre scp.....	24
Imatge 6.1. Latitud del lloc.....	25
Imatge 6.2. Coordenades horitzontals.....	26
Imatge 6.3. Vector de les coordenades horitzontals.....	26
Imatge 6.4. Coordenades equatorials.....	27
Imatge 6.5. Vector de les coordenades equatorials.....	27
Imatge 6.6. Muntatge per determinar la meridiana.....	29
Imatge 6.7. Muntatge per determinar la latitud.....	30
Imatge 6.8. Muntatge per determinar la latitud experimentalment.....	31

6.9. Dibuix esquemàtic d'un rellotge equatorial.....	31
6.10. Projecció ortonormal d'un rellotge equatorial.....	31
6.11. El·lipse del rellotge analemàtic.....	32
6.12. El·lipse del rellotge tallada per una ombra.....	33
6.13. El·lipse amb les ombres de dos dies diferents.....	35
6.14. Gràfic amb les posicions de les ombres i la posició de l'eix de diferents dies.....	36
6.15. Equació del temps.....	36
6.16 Rellotge analemàtic amb l'analema per a les dotze.....	37
7.1. Primer prototip.....	38
7.2. Projecció d'un rellotge equatorial sobre el terra.....	39
7.3. Superposició d'un rellotge equatorial sobre un d'horitzontal per tal de trobar la relació horària.....	39
7.4. Rellotge analemàtic i horitzontal enganxats.....	43
7.5. Centre de taula SNUDDA amb les marques dibuixades.....	43
7.6. Rellotge amb les marques resseguides pel pirògraf.....	44
7.7. El rellotge un cop acabat.....	44