Banyoles a 3 de gener de 2011

IES Pere Alsius i Torrent - Treball de Metodologia

Eclipsis Solars

Com calcular-ne les característiques principals mitjançant elements besselians

Aleix Giménez Grau

dirigit per Àngela Donoso

Agraïments

Dono les gràcies als meus tutors de les Estades d'Estiu i Ciència de Caixa Catalunya (E_2C_3) Manoj Mathew, Giovani Volpe i Giorgio Volpe per l'ajuda que em van donar a l'hora d'escriure un article relacionat amb aquest. També a Stephen Moshier, per permetre'm utilitzar el seu programa per determinar la posició del Sol, la Lluna i els planetes.

Índex

Índex de figures

Capítol 1

Introducció

1.1 Context

Els eclipsis, tant solars com lunars, són fenòmens astronòmics que han estat observats per multitud de cultures, des dels grecs fins als maies passant pels hindús. S'han trobat restes del 2500 a.C. que demostren que civilitzacions tan antigues com els xinesos, els babilonis o els sumeris ja els coneixien. Molts d'ells van crear mites per a explicar-los, però a més a més tenien astrònoms que van ser capaços de descobrir què eren i perquè passaven. Per exemple, el 8 a.C. els xinesos ja van poder predir alguns eclipsis mitjançant un cicle lunar de 135 mesos, i uns anys després, el 206 d.C., ja tenien un mètode fiable de predir-los. Els babilonis i sumeris, en canvi, van descobrir un cicle (que actualment s'anomena cicle de Saros) de 223 mesos lunars sinòdics[1] després del qual es repeteixen els eclipsis.

Tot i això, no només han tingut importància pel desenvolupament de l'astronomia antiga, sinó que també han tingut molta influència en l'edat mitjana i l'època contemporània. Un eclipsi famós va ser el del 29 de Maig de 1919, que va permetre confirmar la teoria de la relativitat general.

[1]Un mes sinòdic és el període entre dues llunes noves consecutives. Equival a uns 29,53 dies.

Els eclipsis, a més de ser una eina molt important per la ciència, també tenen molta importància per aficionats a l'astronomia d'arreu del món. Molts d'ells viatgen d'una punta a l'altre del planeta per poder veure la fase de totalitat d'un eclipsi solar, un dels fenòmens naturals més espectaculars que es poden presenciar.

Fins i tot la gent normal queda captivada pels eclipsis, i molts d'ells fan molts esforços per poder-los veure. Així com, per exemple, els trànsits dels planetes són pocs coneguts pels profans i molt perseguits pels aficionats, els eclipsis de Sol i de Lluna són el fenomen astronòmic per excel·lència que agrada a uns i altres.

1.2 Justificació

Actualment totes les dades que podem necessitar sobre un eclipsi estan a Internet, en pàgines web com la de la NASA. Per tant, pot semblar absurd realitzar manualment els càlculs per conèixer les característiques d'un eclipsi determinat.

Tot i això, aquest treball pretén demostrar que el procediment desenvolupat fa uns 200 anys¿? per Bessel continua sent vigent, i que tot i la seva vellesa, permet calcular amb una efectivitat sorprenentment alta els eclipsis solars.

Per altra banda, el fet de realitzar tots els càlculs ens permetrà veure la laboriositat del procediment. A més a més, en aquell moments es realitzaven manualment, és a dir, sense calculadores. Per tant, també farà adonar-nos de fins a quin punt la implantació de la informàtica ha permès agilitzar certes operacions, fent avançar d'aquesta manera la ciència.

1.3 Objectius

L'objectiu d'aquest treball és fer els càlculs necessaris per trobar un punt de la Terra on es pugui veure l'eclipsi total de sol de l'11 de Juliol de 2010 en unes bones condicions.

Un cop fet això, es calcularan les característiques de l'eclipsi en aquest lloc: el temps dels quatre contactes, el moment de màxim eclipsi i la magnitud en aquest instant.

D'aquesta manera, es podria programar un suposat viatge amb l'objectiu de veure l'eclipsi des d'un dels millors llocs possibles. A més a més, el fet de saber les característiques que tindrà l'eclipsi ens permetria programar l'observació de la millor manera possible.

1.4 Metodologia

Per tal d'aconseguir els objectius, s'haurà de seguir aquesta seqüència:

1. Al llarg del treball, utilitzarem certs conceptes bàsics d'astronomia. Per això, començarem amb una breu introducció a l'astronomia, per conèixer el vocabulari imprescindible per comprendre la resta.

2. Un cop fet això, cal familiaritzar-se amb els eclipsis solars. És a dir, conèixer per què passen, en què consisteixen i quines són les seves característiques principals. A més a més, serà important habituar-se a la terminologia utilitzada per parlar d'aquest fenomen.

3. Arribats a aquest punt, s'analitzarà la teoria del càlcul d'eclipsis. Ha estat per poder assolir aquest pas que s'han hagut de fer els dos anteriors.

4. Finalment, per sintetitzar-ho tot i complir l'objectiu del treball, s'aplicarà la teoria per dur a terme el càlcul de l'eclipsi.

L'objectiu del treball és eminentment pràctic. Per tant, en els continguts només s'inclourà la teoria necessària per poder comprendre el procediment. És a dir, no s'explicaran les demostracions de les fórmules, ni més teoria que la estrictament necessària.

Capítol 2

Introducció a l'astronomia

Per poder comprendre el procediment de càlcul dels eclipsis són necessaris una sèrie de coneixements bàsics d'astronomia. A continuació s'exposaran breument els més importants.

2.1 Sistemes de coordenades

En astronomia, són necessaris els sistemes de coordenades per tal de situar els astres dins l'esfera celeste o reconèixer punts sobre la Terra. Una primera classificació es pot fer segons si es tracta de sistemes de referència rectangulars o esfèrics:

Rectangulars: El sistema es defineix a partir dels eixos X, Y i Z, que són perpendiculars entre ells i es creuen a l'origen de coordenades. Per situar un punt P en el sistema, es farà la projecció ortogonal d'aquest punt sobre cada eix, de manera que s'obtindran els punts p_x, p_y i p_z. Les coordenades d'aquest punt seran (x, y, z), que representen les distàncies de les projeccions a l'origen de coordenades. Veure la figura 2.1.

Esfèriques: El sistema es forma a partir de tres eixos perpendiculars entre ells, que es creuen a l'origen de coordenades i que com abans anomenarem X, Y i Z. Suposem que hem de situar un punt P en aquest sistema. Primer de tot, imaginem una esfera centrada a l'origen de coordenades que passa pel punt. Les interseccions de l'eix X amb l'esfera s'anomenaran A i A', les de l'eix Y seran E i O i les del Z seran N i S. Anomenarem P' a la intersecció de l'arc NPS i l'arc OAE. Llavors,

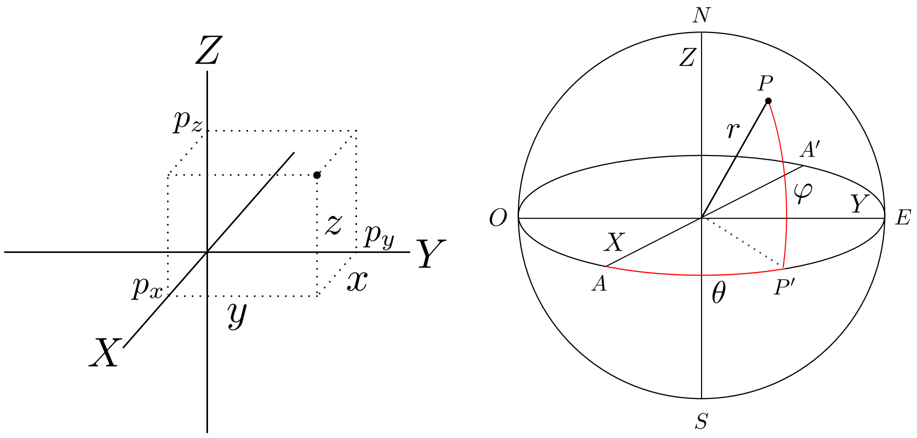

Figura 2.1: Esquema on es veuen les coordenades rectangulars (x, y, z) i les esfèriques (r, θ, φ).

les coordenades per situar al punt seran (r, θ, φ)[1], on r representa la distància del punt a l'origen, θ la distància angular entre A i P' i φ és l'angle entre P i P'. Veure la figura 2.1.

S'anomena *pla fonamental* al pla que conté els eixos X i Y en les coordenades rectangulars, o el pla format per $OAEA'$ en les esfèriques.

Tots els sistemes de referència astronòmics seran variants dels dos anteriors, i només canviarà la direcció del pla fonamental i la posició de l'origen de coordenades.

2.2 Coordenades terrestres

Per situar un punt sobre la Terra, utilitzem un sistema de coordenades esfèric, format per la latitud i la longitud[2]. A continuació explicarem les dues amb més detall.

2.2.1 Forma de la Terra i excentricitat

La Terra no és una esfera perfecte, sinó que està aplanada pels pols. Això fa que tingui forma de geoide de revolució. És a dir, que si féssim una secció a

[1]Aquesta notació pot ser diferent en altres publicacions.

[2]Un sistema esfèric també hauria de considerar el radi, però donat que la superfície de la Terra és pràcticament esfèrica, aquesta coordenada no es té en compte gairebé mai.

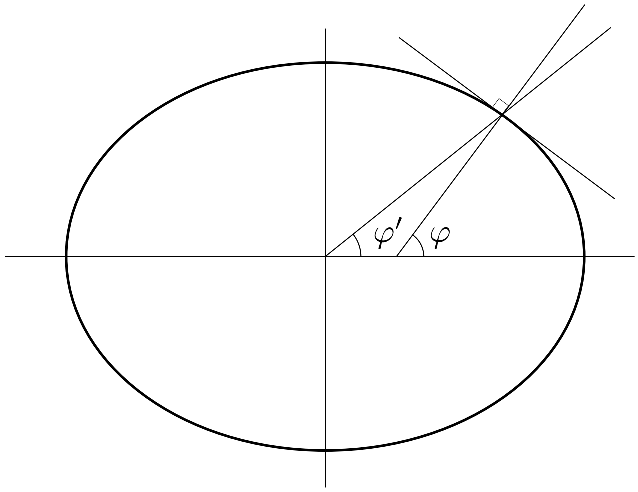

Figura 2.2: Esquema que mostra la relació entre les latituds geocèntrica i geogràfica.

través d'un meridià, obtindríem una el·lipse. Aquesta el·lipse és igual independentment del meridià elegit. Per tant, hi ha una constant que caracteritza l'aplanament de la Terra que és l'*excentricitat de l'el·lipse meridiana.*

Mitjançant una sèrie de càlculs, es pot trobar que l'excentricitat de l'el·lipse meridiana és:

$$e = 0.0818193$$

Aquest valor és el que s'utilitzarà al llarg de tots els càlculs del treball.

2.2.2 Radi de la Terra

Per culpa de la forma de la Terra, el seu radi no és constant, sinó que varia de 6335438.8 m (radi polar) a 6378136.6 m (radi equatorial) en funció de la latitud. L'equació que relaciona latitud i radi és:

$$\rho = R_t \sqrt{\frac{1 - 2e^2 \sin^2 \varphi + e^4 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \tag{2.1}$$

On ρ és el radi que busquem, φ la latitud geogràfica i R_t el radi equatorial.

2.2.3 Latitud

La latitud mesura la distància (en forma d'angle) que hi ha d'un punt a l'equador a través d'un meridià. Degut a la forma de la Terra, es poden distingir dues classes de latitud: la geocèntrica i la geogràfica. A partir de la figura 2.2, es dedueixen les següents definicions:

Geogràfica: És l'angle que formen l'equador respecte la normal del punt. En aquest cas es representa com φ.

Geocèntrica: És l'angle que formen la línia que uneix el punt amb el centre de la terra i l'equador. Es representa amb la lletra grega φ'.

Entre aquestes dues coordenades s'estableix la relació següent,

$$\tan\varphi' = (1 - e^2)\tan\varphi \tag{2.2}$$

que ens permetrà canviar entre una i altra molt fàcilment.

2.2.4 Longitud

És la distància en forma d'angle cap a l'est o cap a l'oest d'un punt respecte el meridià de Greenwich. Se sol expressar entre $-\pi$ i π; en aquest treball es considerarà positiva la longitud est i negativa l'oest.

2.3 Coordenades celestes

L'astronomia utilitza coordenades per designar la posició que ocupen al cel els cossos celestes. Si mirem el cel de nit, veurem que té forma d'esfera: és el que s'anomena esfera celeste. És sobre aquesta esfera on es determinen les coordenades dels astres que veiem.

Per fer-ho, s'utilitzen una sèrie de sistemes de referència esfèrics diferents: les coordenades horitzontals, horàries, equatorials, eclíptiques, galàctiques, etc. En aquest treball, però, només utilitzarem les coordenades equatorials.

2.3.1 Coordenades equatorials

Les coordenades equatorials són un sistema de referència esfèric que té com a pla fonamental l'equador celeste[3] i té l'eix X dirigit cap al punt vernal. L'origen de coordenades es troba al centre de la Terra.

Les components de les coordenades equatorials són la declinació, l'ascensió recta i la distància, que s'expliquen a continuació:

Declinació (δ) És la coordenada equivalent a l'angle φ de les coordenades esfèriques. Mesura el desplaçament d'un astre respecte l'equador celeste.

Ascensió recta (α) És la coordenada equivalent a l'angle θ en les coordenades esfèriques. Mesura el desplaçament d'un astre respecte el punt vernal.

Distància (r) És la mateixa coordenada que en el cas de les esfèriques. En general, no s'acostuma a utilitzar, tot i que en aquest treball sí que serà necessària.

2.4 Temps

En astronomia el concepte de temps és més complex que en la vida quotidiana. Es defineixen diferents sistemes temporals segons l'ús que se n'hagi de fer, i hi ha unes relacions matemàtiques per passar d'uns als altres.

2.4.1 Temps Universal Coordinat (UTC)

El Temps Universal Coordinat (UTC) és una escala temporal basada en el Temps Atòmic Internacional (TAI). Es correspon amb l'antiga escala temporal anomenada GMT (Temps Mitjà a Greenwich).

L'UTC mesura el temps a Greenwich seguint una escala uniforme (el temps atòmic). Pel que fa a la resta de llocs de la Terra amb una longitud diferent, tenen horaris basats en l'UTC als quals s'afegeixen o s'eliminen algunes hores[4]. En aquesta escala es considera que el dia comença a mitjanit. És a dir, que les 00:00 UTC són a la nit i les 12:00 UTC són al migdia aproximadament.

[3] L'equador celeste és la prolongació de l'equador terrestre cap a l'espai. Veure la figura 2.3.

[4] En el cas d'Espanya ens trobem a l'horari UTC+1h o UTC+2h, segons el canvi d'horari.

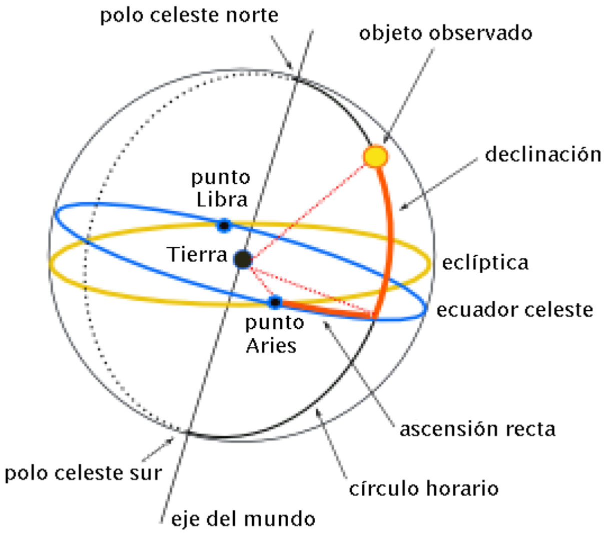

Figura 2.3: La figura mostra un esquema de què són les coordenades equatorials. Hi podem veure l'equador celeste, el pol nord celeste, el punt vernal (punt àries), la eclíptica...

2.4.2 Temps sideri

És un sistema de referència temporal local[5]. Es basa en la posició del punt vernal a l'esfera celeste. Una variant que té especial importància és el Temps Sideri a Greenwich (GAST). En aquest cas, es tracta d'un sistema de referència global, i consisteix en el temps sideri que té Greenwich en un moment determinat.

Trobar el temps sideri a Greenwich

A continuació explicarem el procediment per trobar el temps sideri a Greenwich a un UTC determinat. En primer lloc, necessitem conèixer quin temps sideri a Greenwich es correspon a les 00:00 UTC. Aquesta dada l'anomenarem GTMN i es pot trobar en qualsevol efemèride. Un cop fet això, i tenint en compte que a cada hora de Temps Atòmic li corresponen 1.002737904 hores siderals, podem utilitzar la següent fórmula:

$$\mathrm{GAST} = \mathrm{GTMN} + 1.002737904 \cdot H \tag{2.3}$$

On H és l'hora mesurada segons l'escala UTC.

[5]Un sistema de referència és local quan depèn del lloc i moment de la mesura.

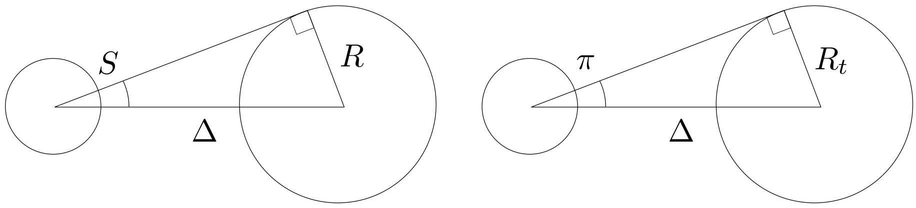

Figura 2.4: Esquema de dos cossos celestes on es mostra la relació entre el semidiàmetre o el paral·laxi, la distància i el radi.

2.5 Semidiàmetre aparent i paral·laxi

Quan veiem un astre al cel, ens sembla que té una determinada mida. El semidiàmetre aparent d'un cos és la variable que mesura aquesta mida, a través de l'angle comprès entre el centre del cos i els seus marges.

Si coneixem el radi d'un objecte i la distància a la que es troba, podem trobar-ne el semidiàmetre a partir de la següent expressió:

$$\sin S = \frac{R}{\Delta}$$

On S és el semidiàmetre, R el radi del cos i Δ la distància entre el centre de la Terra i el centre del cos. Aquesta relació es dedueix a partir de la figura 2.4. En canvi, el paral·laxi és la mida aparent de la Terra (en forma d'angle) vista des de l'altre cos. En aquest cas l'equació seria la següent:

$$\sin \pi = \frac{R_t}{\Delta}$$

On π és el paral·laxi, R_t és el radia de la Terra i Δ torna a ser la distància entre els dos cossos.

Capítol 3

Coneixements previs

L'objectiu del treball és trobar una manera efectiva de predir i calcular eclipsis. Per fer-ho, el primer pas serà analitzar en què consisteix el fenomen, com classificar-lo i conèixer-ne les característiques principals.

3.1 Fenomen i classes

En general, un eclipsi és el fenomen astronòmic que té lloc quan un cos celeste s'interposa entre un altre cos i un observador[1]. Tot i això, normalment ens referim amb la paraula eclipsi al cas concret en què els astres són el Sol i la Lluna, i l'observador es troba a la Terra.

Pel propòsit del treball, serà suficient la següent definició: Denominem eclipsi de Sol al fenomen en què una part o la totalitat de la llum del Sol és ocultada a un observador que es troba a la Terra per culpa de la interposició de la Lluna.

Encara que l'anterior definició d'eclipsi sigui satisfactòria, hem de precisar alguns conceptes per tal d'entendre millor el fenomen. Quan la Lluna, la Terra o els planetes orbiten al voltant del Sol, projecten cap a l'exterior una ombra. Aquesta ombra té forma de con, i l'anomenarem con d'ombra. Quan el con d'ombra de la Lluna interseca amb la Terra és quan es produeix l'eclipsi. A continuació estudiarem amb més detall les característiques del con d'ombra.

[1]Per a una definició més precisa, veure l'article de Planesas a l'apartat [9] de la bibliografia.

Podem dividir el con d'ombra en tres parts: ombra, penombra i antombra[2]. La penombra està formada per la llum que està dins les tangències interiors entre el Sol i la Lluna. L'ombra i l'antombra estan constituïdes de la llum de les tangències exteriors. La diferència entre aquestes dues és que l'ombra es troba entre la Lluna i el vèrtex del con, mentre que l'antombra es troba més enllà del vèrtex del con. Finalment, anomenarem eix d'ombra a la recta que uneix els centres de la Lluna i el Sol[3].

Com hem dit, l'eclipsi de Sol es produirà en el moment en que el con d'ombra de la Lluna es trobi sobre la Terra. En funció de quina sigui la part del con que cobreixi un observador, aquest podrà veure un tipus d'eclipsi o un altre.

Si es troba dins la penombra veurà el Sol parcialment cobert per la Lluna: serà un *eclipsi parcial*. En canvi, en el cas de que estigui en la part d'ombra, el Sol es veurà completament cobert: es tractarà d'un *eclipsi total*. Finalment, hi haurà *eclipsi anular* si l'observador es troba submergit en l'antombra. Aquest últim veurà tota la Lluna sobre el Sol, però sense poder-lo cobrir completament.

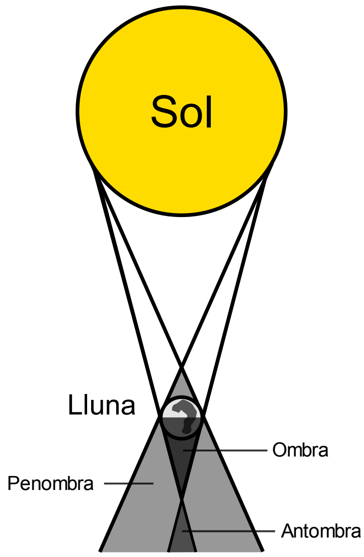

Figura 3.1: Esquema del con d'ombra, on es veu l'ombra, la penombra i l'antombra.

En el paràgraf anterior hem classificat els eclipsis des del punt de vista d'un observador situat en un lloc concret. Tot i això, també els podem classificar vistos com a un fenomen a nivell planetari. En aquest cas, n'hi ha quatre casos principals:

1. Parcial: Quan, durant l'eclipsi, únicament la penombra es troba damunt la Terra. És a dir, en cap moment es podrà veure el Sol completament cobert per la Lluna a cap punt.

2. Total: Quan, com a mínim en un instant, es pot veure el Sol completament cobert per la Lluna. Això significa que l'ombra cobreix en algun moment la superfície terrestre.

[2]Veure la figura 3.1.
[3]O el que és el mateix, l'eix de revolució del con d'ombra.

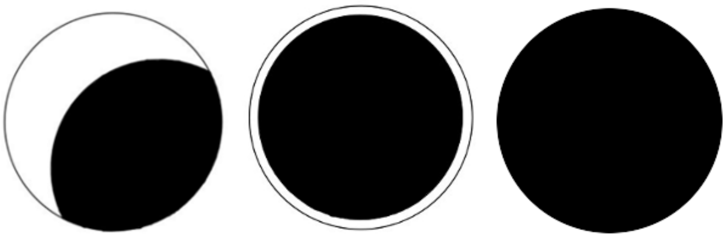

Figura 3.2: La imatge mostra com es veuria el Sol des d'un lloc cobert per la penombra, l'antombra i l'ombra respectivament.

3. Anular: Quan, com a mínim en un instant, l'antombra es troba sobre la superfície de la Terra. Per tant, algun observador podrà veure un eclipsi anular.

4. Híbrid: Un eclipsi és híbrid quan en diferents parts de la trajectòria els punts queden coberts o bé per l'ombra o bé per l'antombra. Es podria dir que és una barreja entre el segon i el tercer tipus.

3.2 Contactes

Quan s'observa un eclipsi, es poden distingir diferents etapes: al principi el Sol només estarà parcialment cobert per la Lluna, en algun altre moment estarà completament ocultat, etc.

Per distingir aquestes fases, fem servir els contactes. Un contacte es produeix cada vegada que el Sol i la Lluna es troben en posició de tangència. Això passarà quant comenci l'eclipsi parcial, quan comenci i acabi la totalitat, i quan finalitzi l'eclipsi parcial. Es poden classificar de la següent manera:

1. Exteriors: Els contactes exteriors són aquells en què tota la Lluna excepte el punt de tangència es troba "fora" del disc solar. El primer i el quart contacte seran d'aquest tipus, i determinaran quan comença i quan acaba l'eclipsi parcial.

2. Interiors: Els contactes interiors són aquells en què tota la Lluna excepte el punt de tangència està cobrint el Sol. Dins aquesta classe hi inclourem el segon i el tercer contactes, que determinaran el període de totalitat o anularitat, és a dir, l'inici i la fi de l'eclipsi total o anular.

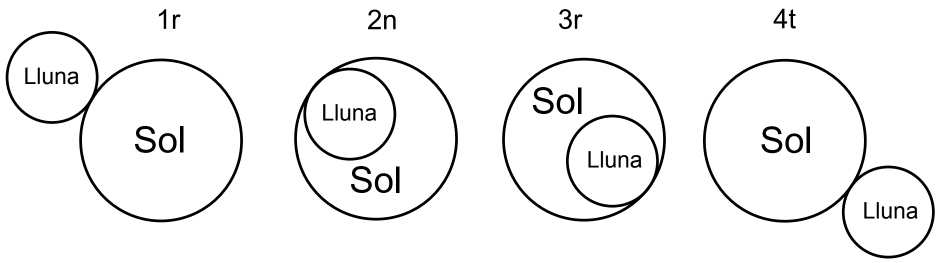

Figura 3.3: Seqüència habitual d'un eclipsi, on es poden veure els quatre contactes. La mida de la Lluna s'ha fet exageradament petita (com en un eclipsi anular), per poder veure més clar el significat dels contactes. Encara més, és més habitual que la Lluna sigui aparentment més gran que el Sol (com en un eclipsi total).

Per tant, si el punt d'observació no arriba a estar cobert per l'ombra o l'antombra, no es podran veure aquests contactes.

3.3 Instant de màxim eclipsi i Gamma

Al llarg d'un eclipsi l'eix d'ombra comença allunyat del centre de la Terra, s'hi acosta de mica en mica, i finalment se'n torna a allunyar. L'instant en que l'eix d'ombra es troba més a prop del centre de la Terra s'anomena *moment de màxim eclipsi*.

La distància a la que es troba l'eix d'ombra respecte el centre de la Terra en aquest moment s'anomena *gamma*, i s'expressa en unitats de radis terrestres. Per tant, el valor de gamma pot oscil·lar entre 0 i una mica més que 1. El 0 expressaria que l'eix d'ombra passa exactament pel centre de la Terra[4], mentre que 1.$\sim$ senyalaria que l'eix no passa per sobre la Terra.

3.4 Magnitud i obscuriment

La magnitud d'un eclipsi representa la màxima fracció del diàmetre de disc solar que quedarà coberta per la Lluna en algun moment de l'eclipsi. En

[4]Això, a la pràctica, no passarà mai. El valor de gamma més petit conegut és de 0,008 i correspon a l'eclipsi solar que tindrà lloc el 08 de Març del 2342.

el cas dels eclipsis parcials i anulars, aquesta variable lògicament serà més petita que 1, mentre que en els totals i híbrids serà o bé 1 o bé un valor lleugerament superior[5].

La magnitud també es pot considerar com una variable a nivell local. La magnitud d'un eclipsi en un lloc determinat és la part del Sol coberta per la Lluna en el moment d'eclipsi màxim del propi punt. És a dir, que la magnitud vista a nivell global és la màxima de totes les magnituds considerades a nivell local.

Una altre variable diferent és l'obscuriment. En aquest cas, el que es mesura és la fracció de superfície solar coberta per la superfície lunar. La relació entre aquestes dues variables (la magnitud i l'obscuriment) és complexa, donat que a més de la distància entre els centres dels astres també importa la seva mida aparent[6].

Com hem vist, la diferència entre aquestes dues variables és que la primera és una relació de longituds (diàmetre del disc solar), mentre que l'obscuriment és una relació entre àrees (la de la Lluna i el Sol).

3.5 Eclipsi central

L'eclipsi central es produeix en el punt de la Terra que es troba exactament sota l'eix d'ombra[7]. Si unim tots els punts on es produeix l'eclipsi central, obtenim una línia, que és l'anomenada *corba d'eclipsi central*. Per tant, els punts de la corba d'eclipsi central seran on es veurà millor l'eclipsi.

Per altra banda, el punt on es produeix l'*eclipsi central al migdia*[8] serà un dels millors llocs de la Terra per veure'l, ja que la fase de totalitat passarà amb el Sol al seu punt més alt. A més a més, serà molt proper al punt de màxim eclipsi[9].

[5] Això és degut a que la Lluna en la fase de totalitat pot ser més "gran"(el semidiàmetre aparent és més gran) que el Sol.

[6] Veure la secció 2.5.

[7] Per tant, si ens trobem davant un eclipsi parcial, no hi haurà cap punt on es produeixi un eclipsi central. És més, es pot donar el cas d'un eclipsi total però que no sigui central (és a dir, que l'eix d'ombra no toqui enlloc amb la Terra, o el que és el mateix, que la gamma sigui més gran que 1).

[8] Astronòmicament es considera que és migdia l'instant en que el Sol es troba al seu punt més alt. És a dir, no s'ha de correspondre amb les 12:00 que marquen els rellotges.

[9] És a dir, el punt on l'eix d'ombra sigui més proper al centre de la Terra

3.6 Definició dels objectius

Un cop conegut el vocabulari bàsic per parlar dels eclipsis, ja podem definir més clarament els objectius del treball. En primer lloc, trobar el punt d'eclipsi central al migdia, és a dir, la latitud i la longitud d'aquest indret.

Un cop fet això, calcular els instants en que es produiran els quatre contactes, el moment de màxim eclipsi i la magnitud en aquest instant.

Capítol 4

Càlcul d'eclipsis

En aquesta secció s'explicarà el mètode per poder calcular les característiques d'un eclipsi. No s'inclouran les demostracions de les fórmules, sinó que s'explicarà breument el significat de cada pas.

4.1 Introducció

A la dècada del 1820, Friederich Bessel va presentar un mètode per poder predir les característiques dels eclipsis solars. Uns anys després, el 1864, William Chauvenet va millorar i ampliar el treball fet per Bessel.

En l'època d'aquestes publicacions, tots els càlculs s'havien de realitzar manualment, per la qual cosa calien moltes simplificacions a canvi de petites pèrdues de precisió. Actualment, però, disposem d'ordinadors, que ens permeten realitzar càlculs complexos gairebé immediatament. Per això, ara els càlculs es fan amb el màxim nivell de precisió, tenint en compte fins i tot les variables més insignificants.

En aquest treball se seguirà el procediment simplificat que va desenvolupar William Chauvenet en el primer volum del seu llibre *A Manual of Spherical and Practical Astronomy*, en el capítol X. D'aquesta manera es podrà entendre clarament el procediment, que serà molt menys complex. A més a més, podrem veure al final del treball que els resultats obtinguts són realment satisfactoris.

4.2 Idea principal

El mètode que va desenvolupar Bessel es basa en una idea principal: és més senzill descriure la posició de l'ombra en un pla que no pas sobre la superfície corbada de la Terra. Per tant, el que fa és definir un nou sistema de referència, el pla fonamental del qual passa pel centre de la Terra i és perpendicular a l'eix d'ombra.

Llavors es definiran una sèrie de variables que descriuran la posició del con en aquest nou sistema de referència: seran els elements Besselians. Si calculem els elements Besselians en diferents instants de temps, podrem veure com canvia la posició del con d'ombra sobre el pla fonamental.

Un cop fet això, es podran realitzar càlculs per traslladar els resultats sobre el pla fonamental a la superfície de la Terra, amb la qual cosa es podran fer prediccions.

4.3 Càlcul dels elements Besselians

A continuació s'explicarà el procediment per trobar els elements Besselians. Al final de la secció, també es mostraran una sèrie d'elements Besselians auxiliars, que seran necessaris pels càlculs.

4.3.1 Posició selenocèntrica del Sol

Per trobar els elements Besselians necessitem conèixer les coordenades equatorials selenocèntriques del Sol. És a dir, la declinació, l'ascensió recta i la distància del Sol si aquest fos observat des del centre de la Lluna.

Farem servir la següent notació per a les coordenades:

$$\begin{aligned}
&\text{Lluna} : (\alpha, \delta, r)\\
&\text{Sol} : (\alpha', \delta', r')\\
&\text{Sol selenocèntric} : (a, d, G)
\end{aligned}$$

Llavors, l'equació que ens permet trobar les coordenades selenocèntriques del Sol és:

$$\begin{aligned}
G\cos d\cos a &= r'\cos\delta'\cos\alpha' - r\cos\delta\cos\alpha\\
G\cos d\sin a &= r'\cos\delta'\sin\alpha' - r\cos\delta\sin\alpha\\
G\sin d &= r'\sin\delta' - r\sin\delta
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Per simplificar definirem el segon membre de cada equació com A, B i C respectivament. D'aquesta manera podem trobar les següents relacions:

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{B}{A} \\ \tan d &= \frac{C}{B} \sin a \\ G &= C \csc d \end{aligned}$$

S'ha de tenir en compte el quadrant al qual pertany cada angle. Per fer-ho, hem de basar-nos en el fet que $\cos d$ i la distància G sempre seran positius[1]. El procés per trobar el quadrant de a i d pot ser el següent.

1. Per trobar el quadrant de la declinació només ens hem de fixar en la C. Si és positiva estarà al primer, mentre que si és negativa estarà al quart.

2. Per trobar el quadrant de l'ascensió recta haurem de mirar la A i la B. Si la A és positiva la ascensió recta es trobarà o bé al primer o bé al quart quadrant, i si és negativa al segon o al tercer. En canvi, si la B es positiva estarà en el primer o segon, i si es negativa en el tercer o quart.

4.3.2 Coordenades lunars al pla fonamental

A continuació trobarem les coordenades (x, y, z) de la Lluna en el nou sistema de referència que hem definit. Donat que el pla fonamental és perpendicular a l'eix d'ombra, les coordenades x i y de la Lluna es correspondran amb les coordenades de l'eix d'ombra.

L'equació per trobar aquestes coordenades és:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\delta \sin(\alpha - a) \\ y &= r \left[\sin\delta \cos d - \cos\delta \sin d \cos(\alpha - a)\right] \\ z &= r \left[\sin\delta \sin d - \cos\delta \cos d \cos(\alpha - a)\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

La z no és un dels elements Besselians. Tot i això, cal calcular-la perquè serà necessària a l'hora de trobar altres elements Besselians.

[1] Això es degut a que la declinació està sempre entre els 90 i -90 graus.

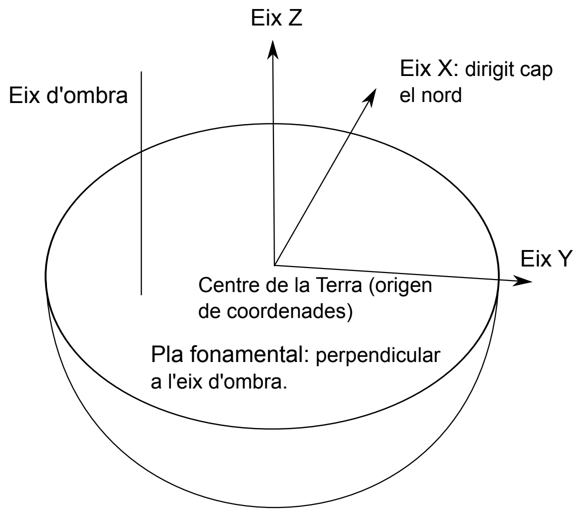

Figura 4.1: La figura mostra l'estructura del pla fonamental, l'eix d'ombra i el sistema de coordenades que hem definit.

4.3.3 Radi de l'eix d'ombra

L'objectiu d'aquesta secció és el de poder trobar el radi de l'eix d'ombra en el pla fonamental o en qualsevol pla paral·lel a aquest. En primer lloc, hem de fer unes quantes definicions:

H: Semidiàmetre aparent del Sol a la distància mitjana. És una constant de valor 0,266796333338º.

π_0: Paral·laxi mitjà del Sol. És una constant de valor $2.44281888883 \cdot 10^{-3}$.

k: Quocient entre el radi de la Lluna i l'equatorial terrestre. Degut a la irregularitat dels marges de la Lluna, no hi ha un valor completament exacte i constant, sinó que se'n fan servir dos diferents. El primer (per la penombra) és $k_p = 0.2725076$ i el segon (per l'ombra) $k_o = 0.2722810$.

f: Angle del con d'ombra. Com veiem a les figures, n'hi ha dos valors, un per l'ombra i l'altre per la penombra, que s'hauran de calcular separadament. A la figura és l'angle $\widehat{EVF}$.

ζ: Distància entre el pla fonamental i un pla paral·lel qualsevol. Està representat per $\overline{DF}$.

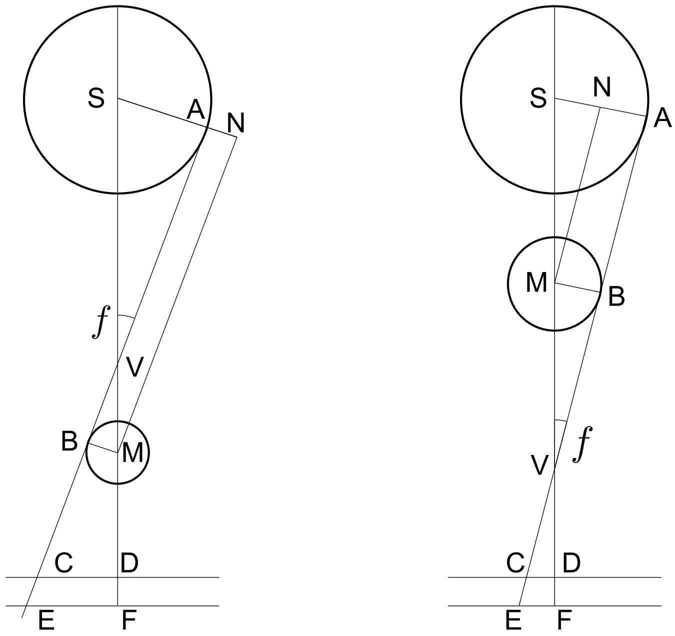

Figura 4.2: Cons d'ombra i penombra.

l: Radi del con d'ombra al pla fonamental. És el segment $\overline{EF}$.

L: Radi del con d'ombra al pla paral·lel respecte el fonamental. En aquest cas, és $\overline{CD}$.

Per a trobar l'angle f, farem servir la següent equació, on el signe positiu es correspon a la penombra i el negatiu amb l'ombra:

$$\sin f = \frac{\sin H \pm k \sin \pi_0}{G} \tag{4.3}$$

On G és la distància entre el Sol i la Lluna[2] i la resta de variables poden veure's a la llista anterior.

El radi del con al pla fonamental és:

$$l = z \tan f \pm k \sec f \tag{4.4}$$

On el signe positiu correspon a la penombra i el negatiu a l'ombra. Si es necessita saber el radi del con d'ombra en un pla paral·lel a una distància ζ sobre el fonamental, tenim que:

$$L = l - \zeta \tan f \tag{4.5}$$

[2]Veure l'equació (4.1).

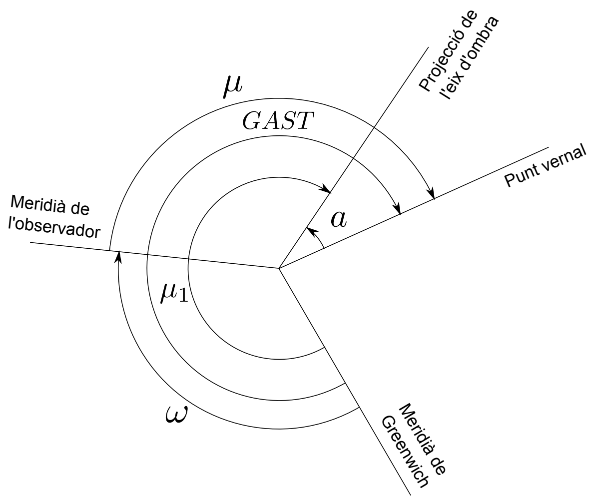

Figura 4.3: Esquema per deduir la fórmula de l'angle horari de Z respecte Greenwich.

La constant $\tan f$ serà molt utilitzada al llarg dels càlculs. Per simplificar, l'expressarem amb la lletra i.

4.3.4 Angle horari de l'eix d'ombra a Greenwich

L'últim element que serà necessari per als càlculs dels eclipsis serà l'angle horari de l'eix d'ombra respecte el meridià de Greenwich. El podem trobar a partir de la següent fórmula, que es dedueix de l'esquema 4.3:

$$\mu_1 = GAST - a \tag{4.6}$$

On $GAST$ és el temps sideri de Greenwich en l'instant del càlcul i a l'ascensió recta selenocèntrica del Sol.

A més a més, a partir de la figura també podem obtenir la següent relació:

$$\theta = \mu - a = \mu_1 - \omega \tag{4.7}$$

On θ és l'angle horari de l'eix d'ombra respecte l'observador, μ el temps sideri de l'observador i ω la longitud de l'observador.

4.3.5 Recopilació dels elements Besselians

Al llarg de les seccions anteriors han aparegut moltes equacions i variables, i pot semblar complicat saber quins sí que són elements Besselians i quins no.

La llista dels que ho són és la següent:

$$d,\ x,\ y,\ l_p,\ l_o,\ i_p,\ i_o,\ \mu_1$$

4.3.6 Variacions i valor exacte dels elements

Trobar el valor dels elements Besselians és bastant laboriós. Podem, però, calcular-los en una sèrie d'intervals, i suposant que varien de manera lineal, trobar-ne els valors intermedis.

En el nostre cas, treballarem amb intervals de 30 minuts. Tenim una sèrie d'instants $\ldots, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \ldots$ separats per un interval constant de temps ΔT. Els corresponents valors dels elements Besselians són x_{-2}, x_{-1}, x_0, $x_1, x_2, \ldots$, i les variacions x' seran:

Temps	Valor de l'element	Variació
T_{-2}	x_{-2}	$x'_{-2} = \frac{x_{-1}-x_{-2}}{\Delta T}$
T_{-1}	x_{-1}	$x'_{-1} = \frac{x_0-x_{-1}}{\Delta T}$
T_0	x_0	$x'_0 = \frac{x_1-x_0}{\Delta T}$
T_1	x_1	$x'_1 = \frac{x_2-x_1}{\Delta T}$
T_2	x_2	$x'_2 = \frac{x_3-x_2}{\Delta T}$

Llavors, el valor d'un element x en un temps T, que es troba entre el T_0 i el T_1 es trobarà de la següent manera:

$$x = x_0 + x' \cdot \tau \quad \text{on} \quad \tau = T - T_0 \quad \text{i} \quad x' = \frac{x_1 - x_0}{T_1 - T_0} \tag{4.8}$$

Per a la resta de valors, es faria de la mateixa manera. Per a veure-ho més clar, posarem un exemple. Tenim els següents valors

$$T_0 = 11.0\text{h}; \quad x_0 = 0.366027$$
$$T_1 = 11.5\text{h}; \quad x_1 = 0.593769$$

i volem saber quan val la x a les 11h 10min 42s. Seguint el procediment anterior:

$$x' = \frac{0.593769 - 0.366027}{0.5} = 0.455484$$
$$T = 11\text{h}\,10\text{min}\,42\text{s} = 11.178\text{h}; \quad T_0 = 11\text{h}; \rightarrow \tau = 0.178\text{h}$$
$$x = 0.366027 + 0.455484 \cdot 0.178 = 0.447103$$

4.3.7 Altres relacions útils

A part dels elements Besselians, també cal conèixer algunes relacions on intervenen aquests.

Coordenades rectangulars de l'observador al pla fonamental

Suposem que tenim un punt de coordenades (φ, ω), i volem trobar quines seran les coordenades equivalents en el nou sistema de referència que hem definit. Tindran l'estructura (ξ, η, ζ), i podran ser trobades segons les fórmules:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \sin \theta \\ \eta &= \rho \left[\sin \varphi' \cos d - \cos \varphi' \sin d \cos \theta\right] \\ \zeta &= \rho \left[\sin \varphi' \sin d + \cos \varphi' \cos d \cos \theta\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

on φ' és la latitud geocèntrica, ρ és el radi de la Terra a aquesta latitud i $\theta = \mu_1 - \omega$, tal i com passa a l'equació (4.7).

Variables auxiliars

Per algun dels càlculs necessitarem algunes variables auxiliars, que s'obtenen a partir dels elements Besselians bàsics. Aquestes variables són φ_1, d_1 i ρ_1. Les podem obtenir a partir de les relacions següents:

$$\tan \varphi_1 = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2} \tag{4.10}$$

$$\rho_1 \sin d_1 = \sin d \tag{4.11}$$

$$\rho_1 \cos d_1 = \cos d \sqrt{1 - e^2} \tag{4.12}$$

4.4 Eclipsi central al migdia

En aquesta secció trobarem el punt de la Terra on l'eclipsi central es produirà al migdia. Aquest, lògicament, és un dels millors per veure l'eclipsi.

En primer lloc, tenim que

$$\varphi_1 = \beta + d_1; \qquad \omega = \mu_1 \tag{4.13}$$

on

$$\sin \beta = y_1; \qquad y_1 = \frac{y}{\rho_1}$$

i el valor de totes aquestes variables ha d'estar calculat en el moment en què $x = 0$. Per tant, per trobar el punt on l'eclipsi es produeix al migdia, haurem de seguir els següents passos:

1. En primer lloc, trobem en quin temps concret es produeix que $x = 0$.
2. Trobem el valor de d en aquest instant, i a partir d'ella el de les variables auxiliars ρ_1 i d_1.
3. Mitjançant les equacions que acabem de mostrar trobem les coordenades. Per últim, φ_1 s'haurà de convertir a latitud geogràfica.

4.5 Càlculs per a un lloc determinat

A continuació trobarem les condicions en que passarà un eclipsi en unes coordenades terrestres (φ, ω). A aquestes els correspondran unes coordenades (ξ, η, ζ), tal i com s'explica a la secció 4.3.7.

4.5.1 Intstant d'inici i fi de l'eclipsi

Per trobar els instants en què un eclipsi comença o acaba cal fer una sèrie d'aproximacions. Per fer-ho, definirem un temps T_0, que serà la primera aproximació. Llavors, el temps que busquem serà T. Finalment, una tercera variable serà τ, que complirà $T = T_0 + \tau$.

En primer lloc, considerem els elements Besselians x, y, x', y', l, i, pel temps T_0. A partir d'aquí, es defineixen les següents variables:

$$m \sin M = x - \xi \qquad n \sin N = x' - \xi'$$
$$m \cos M = y - \eta \qquad n \cos N = y' - \eta'$$

on

$$\xi' = \mu' \rho \cos \varphi' \cos \vartheta$$
$$\eta' = \mu' \xi \sin d - d' \zeta$$

En aquest cas, μ' i d' seran les diferències horàries explicades a la secció 4.3.6. Un cop calculades totes les variables auxiliars necessàries, ja podem trobar el valor de τ, que ve donat per:

$$\sin \psi = \frac{m \sin(M - N)}{L} \tag{4.14}$$

$$\tau = \frac{L \cos \psi - m \cos(M - N)}{n} \tag{4.15}$$

A partir de (4.15) obtindrem dos temps, un amb el signe del cosinus negatiu i l'altre amb el positiu. El positiu correspon al temps d'inici de l'eclipsi, mentre que el negatiu al temps final.

Els resultats que s'obtenen amb aquest procediment no són exactes, sinó que són menys precisos a mesura que el valor de T_0 és més llunyà al temps final T. Per a solucionar aquest inconvenient, convé:

1. Buscar, de manera aproximada, el moment central en què es produirà l'eclipsi en el lloc donat. Aquest temps serà considerat T_0.

2. Seguint el procediment explicat anteriorment, trobar els dos valors de τ, que anomenarem τ_i i τ_f per l'inici i el final respectivament. D'aquesta manera, sumant el T_0 i τ, trobarem T_i i T_f, dues aproximacions del temps inicial i final de l'eclipsi.

3. A continuació procedirem a trobar una segona aproximació de T_i i T_f. En primer lloc, considerem com a T_0 el valor de T_i. D'aquesta manera s'aconsegueix una altra parella de valors τ_i i τ_f, però el segon no es tindrà en consideració. Així, sumant el nou T_0 amb el nou τ_i, obtenim un nou valor de T_i més proper al real, que ja serà suficientment acurat.

4. Repetim el mateix, però aquest cop el T_0 vindrà donat per T_f de la primera aproximació, i el valor de τ que s'utilitzarà serà el de τ_f.

4.5.2 Moment de màxim eclipsi i magnitud

El mètode per trobar el moment de màxim eclipsi en el punt de coordenades (φ, ω) és semblant a l'exposat a la secció 4.5.1. La diferència és que en aquest cas el valor de τ ve donat per:

$$\tau = -\frac{m\cos(M-N)}{n} \tag{4.16}$$

Tal i com passava abans, hem de fer dues aproximacions, una primera amb el valor de T relativament inexacte i una segona basant-se en els resultats de la primera.

Un cop hem trobat el moment de màxim eclipsi, falta trobar la magnitud de l'eclipsi en aquest instant. Aquesta variable serà anomenada D i vindrà donada per:

$$D = \frac{L_p - |L_p \sin\psi|}{L_p + L_o} \tag{4.17}$$

Capítol 5

Eclipsi de l'11-07-2010

A continuació procedirem a calcular les característiques principals de l'eclipsi de l'11 de Juliol de 2010. En primer lloc, necessitem les coordenades del Sol i la Lluna en tots els moments entre que comença i acaba l'eclipsi separats per l'interval de mitja hora:

Coordenades lunars

Hora	Ascenció recta (α)	Declinació (δ)	Distància (AU)
17.0	109.156136	21.732944	0.00243084
17.5	109.478596	21.664794	0.00243045
18.0	109.800853	21.595999	0.00243006
18.5	110.122907	21.526563	0.00242968
19.0	110.444752	21.456488	0.00242930
19.5	110.766387	21.385775	0.00242892
20.0	111.087809	21.314429	0.00242855
20.5	111.409015	21.242450	0.00242818
21.0	111.730003	21.169843	0.00242782
21.5	112.050769	21.096609	0.00242746
22.0	112.371311	21.022751	0.00242711

Coordenades solars

Hora	Ascenció recta (α')	Declinació (δ')	Distància (AU)
17.0	110.880679	22.050940	1.01662397
17.5	110.901906	22.048121	1.01662332
18.0	110.923133	22.045298	1.01662268
18.5	110.944358	22.042473	1.01662203
19.0	110.965583	22.039645	1.01662137
19.5	110.986807	22.036814	1.01662072
20.0	111.008031	22.033981	1.01662006
20.5	111.029253	22.031145	1.01661940
21.0	111.050475	22.028306	1.01661874
21.5	111.071695	22.025464	1.01661807
22.0	111.092915	22.022620	1.01661740

5.1 Trobar els elements besselians

El primer que haurem de fer és trobar els elements besselians per cada instant de l'eclipsi. A continuació, presentarem el procediment pels elements corresponents a les 19:00h UTC, i al final mostrarem els resultats per a la resta de moments.

5.1.1 Coordenades selenocèntriques del Sol

En primer lloc, hem de trobar les coordenades selenocèntriques del Sol, a partir de l'explicació de l'apartat 4.3.1. Les coordenades equatorials del Sol i la Lluna a les 19:00 són:

$$\begin{aligned} \alpha &: 110.444752^\circ & \alpha' &: 110.965583^\circ \\ \delta &: \ \ 21.456488^\circ & \delta' &: \ \ 22.039645^\circ \\ r &: \ 0.00242930 & r' &: \ 1.01662137 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} A = {} & 1.01662137 \cos 22.039645^\circ \cos 110.965583^\circ - \\ & - 0.00242930 \cos 21.456488^\circ \cos 110.444752^\circ \\ B = {} & 1.01662137 \cos 22.039645^\circ \sin 110.965583^\circ - \\ & - 0.00242930 \cos 21.456488^\circ \sin 110.444752^\circ \\ C = {} & 1.01662137 \sin 22.039645^\circ - 0.00242930 \sin 21.456488^\circ \end{aligned}$$

Que operat correctament dóna:

$$\begin{aligned} A &= -0.336383033 \\ B &= 0.877826128 \\ C &= 0.380596570 \end{aligned}$$

Els quadrants seran $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ i $0 < d < \frac{\pi}{2}$. Finalment:

$$\begin{aligned} \tan a &= 2.609602869 &\rightarrow\quad a &= 110.9668359^\circ \\ \tan d &= 0.404859669 &\rightarrow\quad d &= 22.04103978^\circ \\ & & G &= 1.014192292 \end{aligned}$$

5.1.2 Coordenades de l'eix d'ombra

A continuació trobarem les coordenades de l'eix d'ombra sobre el pla fonamental.

$$\begin{aligned} x &= 0.00242930 \cos 21.456488^\circ \sin(110.444752^\circ - 110.9668359^\circ) \\ y &= 0.00242930[\sin 21.456488^\circ \cos 22.04103978^\circ - \\ &\quad - \cos 21.456488^\circ \sin 22.04103978^\circ \cos(110.444752^\circ - 110.9668359^\circ)] \\ z &= 0.00242930[\sin 21.456488^\circ \sin(-4^\circ 5' 32.04'') - \\ &\quad - \cos 21.456488^\circ \cos 22.04103978^\circ \cos(110.444752^\circ - 110.9668359^\circ)] \end{aligned}$$

Les operacions anteriors donen el resultat en unitats astronòmiques (UA). Dividint pel factor de conversió $4.263521 \cdot 10^{-05}$ UA/$\mathrm{R_t}$ obtindrem la mesura en radis terrestres.

$$\begin{aligned} x &= -2.060154257 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{UA} = -0.483204909\ \mathrm{R_t} \\ y &= -2.474890167 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{UA} = -0.580480357\ \mathrm{R_t} \\ z &= 2.429082736 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{UA} = 56.97363192\ \mathrm{R_t} \end{aligned}$$

5.1.3 Radi de l'eix d'ombra

En primer lloc, trobarem l'angle del con d'ombra a partir de la fórmula (4.3):

$$\sin f_p = \frac{\sin 0.266796333338^\circ + 0.2725076 \cdot \sin 2.44281888883 \cdot 10^{-3}}{1.014192292}$$

$$\sin f_p = 4.602752434 \cdot 10^{-3} \rightarrow \tan f_p = 4.60280119 \cdot 10^{-3}$$

$$\sin f_o = \frac{\sin 0.266796333338^\circ - 0.2722810 \cdot \sin 2.44281888883 \cdot 10^{-3}}{1.014192292}$$

$$\sin f_o = 4.579850279 \cdot 10^{-3} \rightarrow \tan f_o = 4.579898311 \cdot 10^{-3}$$

A més, $\cos f_p = 0.999989407$ i $\cos f_o = 0.999989512$. Per tant, el radi del con al pla fonamental:

$$l_p = 56.97363192 \cdot 4.602801190 \cdot 10^{-3} + \frac{0.2725076}{0.999989407}$$
$$l_o = 56.97363192 \cdot 4.579898311 \cdot 10^{-3} - \frac{0.2722810}{0.999989512}$$

És a dir:

$$\begin{aligned} l_p &= \quad 0.534748787\,\mathrm{R_t} \\ l_o &= -0.011350415\,\mathrm{R_t} \end{aligned}$$

5.1.4 Angle horari de Z respecte Greenwich

L'11 de Juliol de 2010, el temps sideri de Greenwich a les 0h era de 19 hores 15 minuts i 9.979 segons, que expressat en segons és igual a 69309.979 s. Per tant, el temps sideri a Greenwich a les 11h serà

$$69309.979s + 19h \cdot \frac{3600s}{1h} \cdot 1.002737909350795 = 137897.252s$$

o en graus:

$$137897.252s \cdot \frac{1h}{3600s} \cdot \frac{360°}{24h} = 574.5718832° = 214.5718832°$$

Per (4.6), tenim que:

$$\mu_1 = 214.5718832° - 110.9668359° = 103.6050473°$$

5.1.5 Variacions dels elements

Utilitzarem per l'exemple els valors de x a les 19:00 UTC i a les 19:30 UTC, que són $x_{19.0} = -0.483205$ i $x_{19.5} = -0.204566$. És a dir, que

$$x'_{19.0-19.5} = \frac{-0.204566 + 0.483205}{0.5} = 0.557278$$

I així es calcularia per a la resta d'elements i temps.

Elements Besselians

Hora	x	y	l_p	l_o	μ_1	d
17.0	-1.597696	-0.308123	0.534832	-0.011268	1.284809	0.384874
17.5	-1.319096	-0.376117	0.534820	-0.011279	1.415709	0.384828
18.0	-1.040477	-0.444175	0.534803	-0.011297	1.546609	0.384782
18.5	-0.761844	-0.512297	0.534779	-0.011321	1.677510	0.384735
19.0	-0.483205	-0.580480	0.534749	-0.011350	1.808410	0.384689
19.5	-0.204566	-0.648723	0.534713	-0.011386	1.939310	0.384642
20.0	0.074066	-0.717024	0.534670	-0.011429	2.070210	0.384596
20.5	0.352683	-0.785380	0.534622	-0.011477	2.201111	0.384549
21.0	0.631281	-0.853791	0.534567	-0.011531	2.332011	0.384502
21.5	0.909851	-0.922255	0.534506	-0.011592	2.462911	0.384456
22.0	1.188387	-0.990769	0.534439	-0.011659	2.593812	0.384409

Taula 5.1: Aquesta taula conté els valors de tots els elements besselians en els instants en que l'eclipsi té lloc.

5.1.6 Recull d'elements besselians

A les taules 5.1.6 i 5.1.6 podem veure els elements besselians i les seves variacions obtinguts per la resta d'hores. Han estat calculats mitjançant un programa informàtic, de manera que són més precisos que les obtingudes a mà. Les petites diferències que hi puguin haver són degudes a aquest fet.

Els elements besselians que són angles estan expressats en radians en les dues taules. Els valors de la tangent de f no apareixen perquè són constants, i tenen els següents valors:

$$\tan f_p = 0.004603 \quad \tan f_o = 0.004580$$

5.2 Eclipsi central al migdia

Hem de trobar en quin instant $x = 0$. Si ens fixem en l'anterior taula, veiem que el punt on es produeix aquest canvi de signe és entre les 19:30h i les 20:00h. Tenim que la x compleix que:

$$x = x_{19.5} + x'_{19.5} \cdot \tau$$

Tal i com s'explica en la secció 4.3.6. A partir d'aquí, i donant els valors corresponents que trobem a les taules per a les 19:30, podrem trobar l'instant

Variacions dels elements

Hora	x'	y'	l'_p	l'_o	μ'_1	d'
17.0	0.557252	-0.136240	-0.000048	-0.000047	0.261800	-0.000093
17.5	0.557265	-0.136303	-0.000054	-0.000054	0.261800	-0.000093
18.0	0.557274	-0.136365	-0.000060	-0.000060	0.261800	-0.000093
18.5	0.557278	-0.136426	-0.000066	-0.000066	0.261801	-0.000093
19.0	0.557278	-0.136486	-0.000072	-0.000072	0.261801	-0.000093
19.5	0.557270	-0.136543	-0.000078	-0.000078	0.261801	-0.000093
20.0	0.557263	-0.136601	-0.000085	-0.000084	0.261801	-0.000093
20.5	0.557250	-0.136657	-0.000091	-0.000090	0.261801	-0.000093
21.0	0.557231	-0.136712	-0.000097	-0.000097	0.261801	-0.000093
21.5	0.557209	-0.136766	-0.000103	-0.000103	0.261801	-0.000093
22.0	0.557181	-0.136818	-0.000109	-0.000109	0.261801	-0.000093

Taula 5.2: En aquesta taula es mostren les variacions dels elements besselians. Per exemple, a la fila de les 19.0 es mostren les taxes de variació mitjana entre les 19.0 i les 19.5.

en que $x = 0$:

$$0 = -0.204566 + 0.557270 \cdot \tau$$
$$\tau = 0.367085972\,\mathrm{h}$$

Per tant, l'hora en que $x = 0$ és aproximadament a les 19.86709h = 19h52m1.5s. En aquest instant, tenim que:

$$d = 22.0364072^\circ\ ; \quad y = -0.698846019\ ; \quad \mu_1 = 116.6206017^\circ$$

Per les fórmules de les variables auxiliars (secció 4.3.7), trobem que:

$$\tan d_1 = \frac{\tan d}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\tan 22.0364072^\circ}{\sqrt{1-e^2}} = 0.406127237 \to d_1 = 22.10341072^\circ$$

I llavors p_1 es trobarà com:

$$p_1 = \frac{\sin d}{\sin d_1} = \frac{\sin 22.0364072^\circ}{\sin 22.10341072^\circ} = 0.997119844$$

I ara ja podrem trobar les coordenades del punt on l'eclipsi central es produeix al migdia. Això ho farem a partir de l'equació (4.13). En primer lloc, la latitud:

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{y}{p_1} + d_1 = \arcsin\frac{-0.698846019}{0.997119844} + 22.10341072^\circ =$$
$$= -22.39300296^\circ$$

Que hem de convertir en latitud geogràfica a partir de la fórmula (4.10):

$$\tan\varphi = \frac{\tan -22.39300296}{\sqrt{1-e^2}} = -0.413413497 \rightarrow \varphi = -22.46080174^\circ$$

I com veiem a (4.13), la longitud és igual que l'angle horari de l'eix d'ombra. És a dir, que:

$$\omega = \mu_1 = 116.6206017^\circ$$

Per tant, ja hem trobat les coordenades on l'eclipsi central es produeix al migdia, que són:

$$\begin{aligned} \varphi &= -22.46080174^\circ \\ \omega &= \quad 116.6206017^\circ \end{aligned}$$

Recordem, també, que la longitud positiva es correspon amb la longitud est.

5.3 Càlculs pel punt trobat

A la secció anterior hem trobat que l'eclipsi central al migdia es produirà en un punt de latitud 22.46080174º S i de longitud 116.6206017ºE. A continuació trobarem en quin moment començarà i finalitzarà l'eclipsi en aquest punt, quan serà l'eclipsi màxim i el grau d'obscuritat. Cadascuna d'aquestes característiques serà calculada per separat.

5.3.1 Variables comunes

A continuació calcularem dues variables que no varien en el temps i que depenen de la posició del punt. Per tant, calculant-los un sol cop en farem prou.

En primer lloc, trobem el radi de la Terra en aquest punt amb la fórmula (2.1), que és:

$$\rho = R_t\sqrt{\frac{1-2e^2\sin^2\varphi + e^4\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Introduint el valor de la latitud, trobem que $\rho = 0.99951411\ \mathrm{R_t}$. També fa falta la latitud geocèntrica, que es troba a partir de

$$\tan\varphi' = \tan\varphi(1-e^2) = -0.410644724 \rightarrow \varphi' = -22.32524601^\circ$$

5.3.2 Inici de l'eclipsi parcial

Com s'explica a la secció 4.5.1, cal fer una aproximació del temps d'inici. Donat que el punt es troba relativament a prop de l'equador, i es troba a la línia d'eclipsi central, podem dir que l'eclipsi en aquest punt durarà aproximadament tres hores.

Per tant, considerant que el temps que hem trobat abans (19h 52m 1.5s) es troba més o menys entre el temps inicial i el final, podem dir que t_i és aproximadament 19h 52m - 1h 30m = 18h 22m. Per tant, tenim que

$$T = t_i + \tau = 18.367 + \tau$$

On T és el temps buscat i τ serà el temps "auxiliar" que utilitzarem per arribar al primer.

En aquesta hora, els valors de les constants que necessitem són:

$$\begin{aligned}
&d = 0.384748\,\mathrm{rad}, \quad \mu_1 = 1.642603\,\mathrm{rad} \;\rightarrow\; \theta = -0.392811\,\mathrm{rad} \\
&x = -0.836143\,\mathrm{R_t}, \quad y = -0.494176\,\mathrm{R_t}, \quad l = 0.534781\,\mathrm{R_t} \\
&\mu_1' = 1.26924463 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad}, \quad d' = -4.50853448 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{rad} \\
&i_p = \tan f_p = 0.004603
\end{aligned}$$

Per tant, si introduïm aquests valors i els de la latitud i la longitud a la equació (4.9):

$$\begin{aligned}
\xi &= \rho \cos\varphi' \sin\theta \\
\eta &= \rho\,[\sin\varphi' \cos d - \cos\varphi' \sin d \cos\theta] \\
\zeta &= \rho\,[\sin\varphi' \sin d + \cos\varphi' \cos d \cos\theta]
\end{aligned}$$

Obtenim les coordenades rectangulars de l'observador, que són les següents:

$$\begin{aligned}
\xi &= -0.35392165\,\mathrm{R_t} \\
\eta &= -0.67251474\,\mathrm{R_t} \\
\zeta &= 0.64922404\,\mathrm{R_t}
\end{aligned}$$

Les variacions de les coordenades rectangulars (ξ' i η') vindran donades per:

$$\begin{aligned}
\xi' &= \mu' \rho \cos\varphi' \cos\vartheta \\
\eta' &= \mu' \xi \sin d - d' \zeta
\end{aligned}$$

De manera que si hi introduïm els valors de les variables necessàries, obtenim que:

$$\begin{aligned}
\xi' &= 0.22362293 \\
\eta' &= -0.06602114
\end{aligned}$$

Ja només fa falta trobar els valors de M, m, N i n, que són:

$$M = \arctan \frac{x-\xi}{y-\eta} = -1.216568\,\text{rad}$$
$$m = \frac{x-xi}{\sin M} = 0.514142\,\mathrm{R_t}$$
$$N = \arctan \frac{x'-\xi'}{y'-\eta'} = -1.363008\,\text{rad}$$
$$n = \frac{x'-\xi'}{\sin N} = -0.340986\,\mathrm{R_t}$$

I finalment el radi del con de penombra en el pla de l'observador:

$$L_p = l_p - i_p\zeta = 0.531792\,\mathrm{R_t}$$

D'aquesta manera podem trobar ψ i τ, que és el que estàvem buscant:

$$\sin\psi = \frac{m\sin(M-N)}{L} = 0.141074 \to \psi = 0.141546, 3.000047\,\text{rad}$$

Necessitem el valor de ψ perquè $\cos\psi > 0$, per tant ens quedem amb $psi =$ 0.141546 rad, i ja podem trobar el valor de τ:

$$\tau = \frac{L\cos\psi - m\cos(M-N)}{n} = -0.052303$$

Per tant, seguint allò que hem dit al principi, el temps inicial exacte serà

$$T = t_i + \tau = 18.366667 - 0.052303 = 18.31436367\,\text{h} = 18\text{h}\ 18\text{min}\ 51\text{s}$$

Es podria fer una segona aproximació d'aquest temps, però donat que el temps inicial aproximat i el que s'ha trobat són tan propers, això seria completament innecessari.

5.3.3 Fi de l'eclipsi parcial

El procediment a seguir és exactament el mateix que acabem de fer. En aquest cas, però, sumarem una hora i mitja al temps central. És a dir, t_f = 19h 52min + 1h 30min = 21h 22min. Seguint els mateixos passos que abans, arribem a que

$$\sin\psi = -0.238065 \ \to\ \psi = -0.240373,\ 3.381966\,\text{rad}$$

En aquest cas, els cosinus ha de ser negatiu, per tant ens quedem amb $\psi =$ -0.240373 rad. Ja podem trobar el temps final, que serà:

$$\tau = -0.009274 \ \to\ T = t_f + \tau = 21\text{h}\ 21\text{min}\ 27\text{s}$$

Una altre vegada, el temps aproximat que hem triat el principi és molt proper al resultat obtingut, per tant, no caldrà fer una segona aproximació.

5.3.4 Duració de la fase de totalitat

Per saber quan dura la fase de totalitat el que hem de trobar és simplement quan comença i quan acaba l'eclipsi total. Per tant, el procediment és exactament el mateix que en els dos casos anteriors, però lògicament, no treballarem amb l_p i L_p, sinó que ho farem amb l_o i L_o.. Aquest cop, però, donat que la fase de totalitat no sol durar més d'uns 5 minuts, simplement agafarem com a temps inicial t_i = 19h 52min i els altres dos temps sortiran a partir d'aquests.

Dit això, i realitzant les operacions corresponents, arribem al següent valor de ψ:

$$\sin\psi = 5.248902 \cdot 10^{-5} \;\rightarrow\; \psi = 5.248902 \cdot 10^{-5}, 3.141540$$

Introduint ambdós valors a

$$\tau = \frac{L_o \cos\psi - m\cos(M-N)}{n}$$

Obtenim aquests dos valors de τ:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -0.045599\,\text{h} \rightarrow T_1 = 19\text{h}\,49\text{min}\,16\text{s} \\ \tau_2 &= 0.045603\,\text{h} \rightarrow T_2 = 19\text{h}\,54\text{min}\,44\text{s} \end{aligned}$$

Per tant, durant 5min 28s, es veurà l'eclipsi total en aquest punt.

5.3.5 Màxim eclipsi

Per últim, només fa falta trobar en quin moment l'eclipsi serà màxim. En aquest cas agafem com a temps inicial t_i = 19h 52min. Ara τ vindrà donat per la següent expressió:

$$\tau = -\frac{m\cos(M-N)}{n}$$

La qual cosa ens dona com a resultat $\tau = 0.000437$h, que fa que el moment de màxim eclipsi sigui a les 19h 52min 1.5s. Fixem-nos que, com ja ha estat comentat, l'instant en que l'eclipsi central passa al migdia és exactament el mateix en que l'eclipsi és màxim.

5.3.6 Grau d'obscuritat

A les 19h 52min 1.5s (el moment de màxim eclipsi), tenim que les següents variables tenen aquests valors:

$$\begin{aligned} Lo &= -0.014704\,\mathrm{R_t} \\ Lp &= \quad 0.531395\,\mathrm{R_t} \\ \sin\psi &= -1.452421\cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Que posats a la fórmula

$$D = \frac{L_p - |L_p \sin\psi|}{L_p + L_o}$$

Dona com a resultat

$$D = 1.028458 \sim 102.8\%$$

5.4 Resultats

5.4.1 Recull dels resultats

Amb els càlculs s'han obtingut una sèrie de resultats, però cal distingir entre els que són útils i els que només han servit com a pas previ per a trobar els altres. A continuació es presentaran els que tenen rellevància.

Eclipsi central al migdia:

Temps : 19h 52min 1.5s
Latitud : 22.46080174º S
Longitud : 116.6206017º E

Contactes en aquest punt:

Inici parcialitat : 18h 18min 51s
Inici totalitat : 19h 49min 16s
Fi totalitat : 19h 54min 44s
Fi parcialitat : 21h 21min 27s

Màxim eclipsi en el punt:

Temps : 19h 52min 1.5s
Grau d'obscuritat : 1.028458 ∼ 102.8%

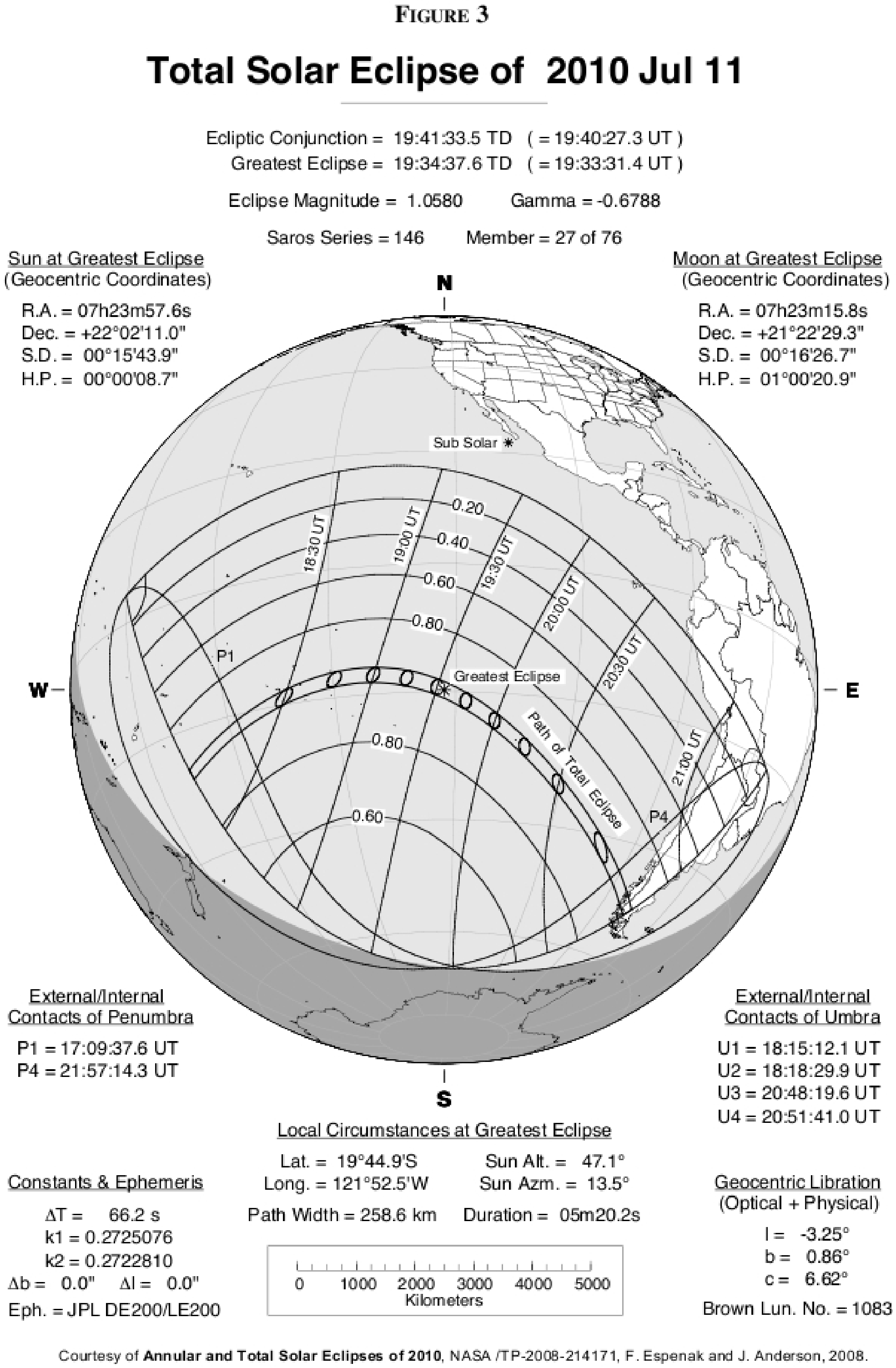

Figura 5.1: La figura mostra el gràfic que ofereix la NASA de l'eclipsi de l'11 de Juliol de 2010. Podem apreciar-hi les característiques bàsiques, així com la trajectòria d'ombra i penombra.

```
   Instant of
Greatest Eclipse:      G0   19:34:37.6   19°44.9'S   122°09.1'W   121°52.5'W

Circumstances at
Greatest Eclipse:   Sun's Altitude =  47.1°         Path Width = 258.6 km
                     Sun's Azimuth =  13.5°   Central Duration =  05m20.2s
```

Figura 5.2:

5.4.2 Comprovació dels resultats

Per tal de comprovar si els resultats són correctes, utilitzarem els "Nasa Eclipse Bulletins"[1], uns documents que contenen molta informació sobre eclipsis solars recents. En el nostre cas, ens basarem en el del 2010, que es pot descarregar des del següent enllaç:

http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEpubs/2010/TP214171a.pdf

La part d'aquest document que ens interessa comença a partir de la pàgina 43. Si es fa una ullada ràpida, es veurà que conté nombroses taules amb una sèrie de resultats. És a partir d'aquests que comprovarem la validesa dels nostres càlculs.

Comparació amb el punt d'eclipsi màxim

Les comprovacions d'aquesta secció les farem a partir dels valors que apareixen al final de la pàgina 49 del butlletí, que són les de la figura 5.2.

El punt d'eclipsi màxim, com ja s'ha dit anteriorment, ha de ser bastant proper al punt on l'eclipsi central es produeix al migdia. Com veiem al butlletí de la NASA, el punt d'eclipsi màxim tindrà les següents coordenades:

$$\varphi = 19.748° \; S$$
$$\omega = 122.152° \; W$$
$$T = 19\text{h } 34\text{min } 38\text{s}$$

Que comparades amb les que hem obtingut amb els càlculs:

$$\varphi = 22.461° \; S$$
$$\omega = 116.621° \; W$$
$$T = 19\text{h } 52\text{min } 1.5\text{s}$$

[1]Es poden trobar en aquesta pàgina web: eclipse.gsfc.nasa.gov/SEpubs/bulletin.html .

c = 6.6°

Eclipse Magnitude = 1.05804 G

Polynomial Besselian Elements for:

Figura 5.3:

Central Line Maximum Eclipse			First Contact				Second Contact			Third Contact			Fourth Contact .			
U.T.	Durat.	Alt	U.T.	P	V	Alt	U.T.	P	V	U.T.	P	V	U.T.	P	V	Alt
19:45	05m16.5s	46	18:11:53	289	76	39	19:42:22	113	287	19:47:38	293	109	21:15:52	115	320	43
19:50	05m13.3s	46	18:16:56	290	81	40	19:47:23	113	292	19:52:37	293	114	21:19:41	116	323	41
19:55	05m09.1s	45	18:22:13	291	85	40	19:52:25	114	296	19:57:34	294	118	21:23:22	116	325	39

Figura 5.4: Imatge extreta del butlletí de la NASA on es veuen les característiques dels punts on es produeix l'eclipsi central. Per aquest treball, interessen els valors de la 2ª i la 3ª files.

Veiem que no són gaire distants ni les coordenades ni el temps; si a més tenim en compte que es tracta de dos punts diferents, sembla molt possible que els resultats obtinguts siguin correctes.

Per altra banda, si ens fixem en la magnitud de l'eclipsi, que apareix a la pàgina 48[2], veiem que en el punt on és més gran val $D_1 = 1.05804$. En el punt que hem trobat, la magnitud val $D_2 = 1.028458$. Donat que la que apareix al butlletí és la més gran en qualsevol punt de la Terra, i la que hem obtingut nosaltres és poc més petita, podem estar basant segurs que el punt que hem trobat és un dels millors per veure l'eclipsi.

Comparació amb punts d'eclipsi central

Ara ens fixarem en les dades que apareixen a la figura 5.4. El punt que hem trobat nosaltres és a les 19h 52min 1.5s. Per tant, els valors que hem obtingut haurien de trobar-se entre els de la segona i la tercera fila, però més propers a la segona.

Primer de tot, cal interpretar el significat de les dades que ens dona la NASA. La columna que posa "First Contact" es correspon amb l'inici de l'eclipsi parcial, el "Second Contact" amb l'inici de la totalitat, el "Third Contact" amb la fi de la totalitat i el "Fourth Contact" amb la fi de l'eclipsi parcial. Per tant una possible comparació és la següent:

[2] Veure la figura 5.3

NASA 18:50	NASA 18:55	Mitjana NASA	Manual 18:52
18:16:56	18:22:13	18:19:03	18:18:51
19:47:23	19:52:25	19:49:24	19:49:16
19:52:37	19:57:34	19:54:36	19:54:44
21:19:41	21:23:22	21:21:09	21:21:27

La columna “Mitjana NASA” consisteix en el valor que tindria, segons els resultats de la NASA, el temps si variés de manera lineal. Per tant, no ha d’encaixar exactament amb el nombre real. Tenint això en compte, la poca diferència que hi ha entre els resultats teòrics i els obtinguts manualment indica que els càlculs han estat correctes.

Apèndix A

Glossari

En aquest apèndix s'inclouran les definicions dels conceptes més importants i una llista de les variables i les constants que apareixen al llarg dels càlculs.

A.1 Definicions

Aquí es detallen les definicions dels conceptes més importants i que es repeteixen més sovint al llarg del treball. No són completament rigoroses, sinó que algunes únicament són útils per aquest treball o altres semblants. Per més definicions i més precises, veure la pàgina de la NASA que apareix a l'ítem [11] de la bibliografia.

Antombra: Part del con d'ombra equivalent l'ombra, però que està més allunyada del vèrtex. Veure la secció 3.1, figura 3.1.

Con d'ombra: Ombra produïda per un astre quan s'interposa amb la llum del Sol. En aquest treball sempre ens referirem al con d'ombra produït per la Lluna. Es divideix en ombra, penombra i antombra.

Contactes: Instants en què el Sol i la Lluna es troben en una posició de tangència. N'hi ha quatre en un lloc on l'eclipsi sigui total, i dos en un lloc on l'eclipsi només arribi a ser parcial. Són els següents: *Primer*: Comença l'eclipsi parcial. *Segon*: Comença l'eclipsi total. *Tercer*: Acaba l'eclipsi total. *Quart*: Acaba l'eclipsi parcial. Veure la figura 3.3.

Eclipsi: Fenomen en què una part o la totalitat de la llum del Sol és ocultada a un observador que es troba a la Terra per culpa de la interposició de la Lluna.

Eclipsi anular: Eclipsi en que s'arriba a veure tota la Lluna damunt el Sol, però que no l'arriba a cobrir del tot perquè el seu semidiàmetre aparent és massa petit. És a dir, l'eclipsi que es produeix en un punt cobert per l'antombra. Veure la secció 3.1¿?.

Eclipsi central: Eclipsi que es produeix en un punt que es troba just sota l'eix d'ombra. En un instant determinat, el millor lloc per veure un eclipsi és al punt d'eclipsi central. Un eclipsi central pot ser anular, total o híbrid, però mai parcial.

Eclipsi total: Eclipsi que es produeix en un punt cobert per l'ombra, i des d'on, per tant, es veurà el Sol completament cobert per la Lluna.

Eix d'ombra: Línia imaginària que uneix el centre del Sol i de la Lluna. És, també, l'eix de revolució del con d'ombra.

Gamma: Distància mínima (en radis terrestres) entre l'eix d'ombra i el centre de la Terra a la qual s'arriba durant un eclipsi. Mesura, per tant, la intensitat d'un eclipsi: gammes més properes a zero representen eclipsis de més intensitat. Veure la secció 3.3.

Latitud geocèntrica: És la distància angular entre l'equador i la línia que uneix un punt amb el centre de la Terra. Veure la figura 2.2.

Latitud geogràfica: Distància angular entre l'equador i la normal de la superfície de la Terra en el punt. Veure la figura 2.2.

Longitud: És la distància en forma d'angle d'un meridià respecte el meridià de Greenwich.

Magnitud: La magnitud d'un eclipsi és la màxima fracció del diàmetre de disc solar que quedarà coberta per la Lluna en algun moment de l'eclipsi.

Ombra: Part del con d'ombra des d'on es veu el Sol completament cobert per la Lluna, i per tant, que produeix un eclipsi total. També es pot definir com a la zona que queda continguda entre el vèrtex del con d'ombra i les tangències exteriors entre el Sol i la Lluna. Veure la figura 3.1.

A.2 Variables

ω : Longitud d'un punt de la Terra. Es mesura entre $-\pi$ i π, considerant longitud Est a la positiva, i Oest a la negativa.

φ : Latitud geogràfica.

φ' : Latitud geocèntrica.

α, δ, r : Coordenades equatorials de la Lluna.

α', δ', r' : Coordenades equatorials del Sol.

a, d, G : Coordenades selenocèntriques del Sol.

x, y, z : Coordenades rectangulars de la Lluna al pla fonamental. Les coordenades x i y es corresponen, també, amb la posició de l'eix d'ombra respecte aquest mateix pla.

f_o, f_p : Angles del con d'ombra i el de penombra respectivament. Veure la figura

l_o, l_p : Radi del con d'ombra o de penombra en el pla fonamental.

L_o, L_p : Radi del con d'ombra o de penombra en un pla paral·lel al fonamental, que es troba a una distància ζ.

μ : Temps sideri d'un observador.

μ_1 : Angle horari de l'eix d'ombra respecte Greenwich.

θ : Angle horari de l'eix d'ombra respecte l'observador.

A.3 Constants

Excentricitat: $e = 0.0818193$,

Paral·laxi mitjà del Sol: $\pi_0 = 4.263523264 \cdot 10^{-5}$

Quocient R_{lluna}/R_{terra}**:** $k_p = 0.2725076$, $k_o = 0.2722810$.

Radi equatorial terrestre: $R_{eq} = 6378136.6\,\text{m} = 4.263520958 \cdot 10^{-5}$ UA

Radi polar terrestre: $R_p =$

Radi terrestre: $R_t = 6378136.6\,\text{m} = 4.263520958 \cdot 10^{-5}$ UA

Semidiàmetre aparent solar: $H = 4.656474449 \cdot 10^{-3}$ rad

Unitat astronòmica: UA = 149597871464 m

Bibliografia

[1] http://eclipse99.nasa.gov/pages/traditions_Calendars.html (Consulta 06-03-2010).

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Mes#Mes_Sin.C3.B3dico (Consulta 06-03-2010).

[3] Hawking, Stephen. (2005). *Brevíssima història del Temps*. Barcelona: Columna edicions. (Columna num. 20).

[4] Gil Chica, F. Javier. *Teoría de eclipses, ocultaciones y transitos.* Alacant: Publicaciones Universidad de Alicante.

[5] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/Solar_eclipse.svg (Consulta 07-03-2010).

[6] http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEplot/SEplot2001/SE2005Oct03A.GIF (Consulta 14-03-2010).

[7] Chauvenet, William. (1863). *A Manual of Spherical and Practical Astronomy*. Londres: Trübner & Co.

[8] Espenak, Fred. Meeus, Jean. (2006). *Five Millenium Canon of Solar Eclipses: -1999 to +3000 (2000 BCE to 3000 CE).* Versió digital: http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEpubs/5MCSE.html (Consulta 14-03-2010)

[9] Planesas Bigas, Pere. (1999). *Algunas precisiones y curiosidades sobre los Eclipses de Sol*. Versió digital:

http://www.fomento.es/NR/rdonlyres/dec08248-956a-40e0-8e98-d94bba2321df/4056/planesas1999b.pdf

[10] http://www.armada.mde.es/ArmadaPortal/page/Portal/Armada-Espannola/ciencia_observatorio/06_Hora (Consulta 11-09-2010).

[11] http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEhelp/SEglossary.html

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Latitude (Consultat el 28-12-2010).

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Besselian_Elements (Consultat l'01-01-2011).